

CABIRIA ANDREIAN CAZACU
SOLOMON MARCUS

SIMION STOILOW



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1983

731650

Coperta colecției: CONSTANTIN GHEORGHIU-ENESCU

STILION
STOILU



PREFAȚĂ

Cartea de față, dedicată marelui matematician român Simion Stoilow, este formată din două părți. În prima parte prezentăm viața și opera sa. Cititorul va putea găsi aici numeroase informații inedite. Ele au fost obținute prin consultarea actelor personale și din mărturiile unor rude. De un deosebit folos ne-a fost ediția a doua a *Memoriului asupra lucrărilor științifice*, pe care Stoilow a publicat-o în 1938. În prezentarea operei, autorii s-au străduit să urmărească traiectoria până azi a rezultatelor științifice obținute de Stoilow și să le așeze pe acestea în contextul cercetării matematice actuale. Unele dificultăți de documentare nu au putut fi învinse, informația în ceea ce privește ecoul rezultatelor lui Stoilow fiind deficitară.

Partea a doua a cărții cuprinde o selecție din articolele, cuvântările și corespondența lui Simion Stoilow. În raport cu ceea ce s-a publicat în această privință sub formă de carte (avem în vedere: Simion Stoilow, *Oeuvre mathématique*, Editura Academiei, 1964 și Simion Stoilow, *Matematică și viață*, Editura Academiei, 1972), cele mai multe texte reproduse în volumul de față, sînt inedite. Unele au apărut în presă, dar nu totdeauna am putut identifica numele publicației și data exactă a apariției. Altele, numeroase, existau numai în manuscris și se publică aici pentru prima oară. Însă cele mai multe manuscrise rămase de la Stoilow așteaptă încă să fie studiate și aduse la cunoștință publicului. Ele se află acum

în arhiva Institutului de matematică al Universității din București.

Ne-am permis să trecem textele lui Stoilow în ortografia actuală, pentru a nu crea cititorului dificultăți la lectură. Am respectat însă particularitățile lor stilistice. Poate că nu am fost totdeauna consecvenți cu criteriile adoptate; sperăm că aceasta nu va împiedica înțelegerea textelor.

La realizarea cărții de față am primit sprijinul mai multor persoane și instituții. O parte din arhiva Stoilow se afla în păstrare la locuința regretatului academician Gh. Vrănceanu și sintem recunoscători soției sale pentru a ne fi înlesnit accesul la aceste documente (care, între timp, au trecut în păstrare la Institutul de matematică al Universității din București).

În vederea alcătuirii cărții de față, am cerut sprijinul mai multor colegi. Colegii noștri prof. dr. Martin Jurchescu și dr. George Gussi, cercetător principal la Secția de matematică de la INCREST, au avut amabilitatea de a răspunde inițiativei noastre de a prezenta și alte aspecte ale activității acad. S. Stoilow. Au făcut-o, așa cum ne-am așteptat, cu competență și strălucire. Unele discuții cu dr. C. Bănică, de la aceeași instituție, au fost de asemenea deosebit de utile.

O informație bibliografică bogată privind menționarea, în literatura matematică internațională, a rezultatelor obținute de Stoilow în teoria funcțiilor de variabilă complexă, a fost pusă la dispoziție de tov. Const. Niculescu, fost bibliotecar la Facultatea de matematică din București. Tov. Eliza Roman, de la Serviciul de documentare al Bibliotecii Academiei R.S.R., a pus la dispoziție o bibliografie a operei lui Stoilow (cu indicarea referatelor corespunzătoare, publicate în revistele internaționale de recenzii în domeniul matematicii), precum și unele scrisori adresate acestuia. Un sprijin constant am primit din partea Bibliotecii Institutului de matematică și din partea Bibliotecii Facultății de matematică din București. Lector univ. dr. Micheline Froda Schechter, de la Universitatea din Cluj-Napoca, ne-a pus la dispoziție cea mai mare parte a fotografiilor reproduse în volum. În ceea ce privește fotografia mamei academicianului Stoilow, ea a putut fi obținută cu deosebite dificultăți, prin sprijinul tov. Simona Pascu, de la Institutul de matematică. Tot ei îi dato-

răm unele indicații prețioase relative la viața și familia acad. Stoilow, precum și dactilografiera, cu răbdare și pricepere, a unei părți importante a textului.

Întreaga lucrare a beneficiat de devotamentul și scrupulozitatea prof. Maria Boricean, redactor la Editura științifică și enciclopedică.

Tuturor le exprimăm recunoștința noastră.

CABIRIA ANDREIAN CAZACU și SOLOMON MARCUS

15 mai 1981

Partea întâi

VIATA, ACTIVITATEA SI OPERA LUI SIMION STOILOW

Viața și activitatea acad. Simion Stoilow

Simion Stoilow s-a născut la București, la 2 (14) septembrie 1887. Tatăl său, numit tot Simion Stoilow, a făcut o strălucită carieră militară, obținând gradul de ofițer sub Alexandru Ioan Cuza și ajungând pînă la gradul de general. A participat la Războiul pentru independență, din 1877. Mama sa, Olga Stoilow (născută Greceanu), era originară din Craiova, de unde de altfel provenea și tatăl său. Așa se face că la Craiova, unde a locuit cu părinții săi pe Str. Unirii nr. 9, avea să-și petreacă viitorul mare matematician cea mai mare parte a copilăriei sale. Aici a urmat atît cursul primar (1895—1899) cît și liceul (1899—1907). A avut două surori: pe Olga, mai mică decît el, devenită soția profesorului universitar Alexandru Otetelișanu și pe Paulina, mai mare, devenită prin căsătorie Paulina Dianu. Fratele cel mai mare al lui Simion Stoilow, Constantin, a urmat, ca și tatăl său, o carieră militară, ajungînd și el pînă la gradul de general. Un alt frate, Grigore, de asemenea mai mare decît el, a devenit magistrat.

După terminarea liceului, în 1907, pleacă la Paris, unde devine student în matematici la Facultatea de științe de la Sorbona. Aici își ia licența în 1910, cu o lucrare de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. Rămîne la Sorbona în continuare, pentru doctorat, pînă în 1914, cînd își termină teza, sub conducerea lui Émile Picard, dar o susține abia în iunie 1916, deoarece în perioada 1914—1916 este chemat în țară pentru serviciul militar. Obține gradul de sublocotenent. Cu

acest grad este mobilizat în 1916, îndată după intrarea României în război, devenind ulterior locotenent în arma geniu-lui (telegrafie, apoi proiectoare). Se află în armată, la început în Dobrogea, apoi în Moldova până în 1918.

La vârsta de 14 ani, rămîne orfan de tată. Mama sa a murit cu 30 de ani mai tîrziu, în 1931. De creşterea sa, după vârsta de 14 ani, s-au ocupat în mod special mama sa şi fratele său mai mare, Constantin.

Pentru a ne face o oarecare idee despre climatul în care a trăit, vom menţiona faptul că a fost coleg de şcoală, la Craiova, cu viitorul fizician şi profesor al Universităţii din Bucureşti, Traian Gheorghiu, şi cu viitorii medici Gh. Litareck şi V. Misirlu (?). În timpul petrecut în armată i-a cunoscut pe viitorul chimist şi profesor al Universităţii din Bucureşti, Eugen Angelescu, şi pe matematicianul Constantin Popovici, viitorul academician. La Paris i-a avut profesori pe Émile Picard, Émile Borel, Henri Lebesgue, Édouard Goursat şi Jacques Hadamard. Putem deci spune că Simion Stoilow a fost în contact cu primul eşalon al cercetării matematice mondiale. Émile Picard, cu deosebire, a influenţat preocupările şi formaţia lui Simion Stoilow. Dealtfel, lui Picard îi şi dedică teza sa de doctorat, a cărei temă era foarte apropiată de preocupările profesorului său, binecunoscut pentru rezultatele sale relative la funcţii analitice şi la aplicaţiile acestora în studiul problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale.

Stoilow îşi începe cariera didactică în prima parte a anului 1919, cînd, pentru scurt timp, suplineşte pe Traian Lalescu la catedra de geometrie analitică a Şcolii de poduri şi şosele (care avea, mai tîrziu, să se transforme în Şcoala politehnică şi, apoi, în Institutul politehnic din Bucureşti). În iunie devine docent în analiza matematică la Universitatea din Iaşi (Facultatea de ştiinţe), unde ţine, în această calitate, un curs de funcţii discontinue. Nu deţinem informaţii privind profilul acestui curs, nu ştim ca el să fi fost redactat şi multiplicat, dar este în afară de orice îndoială că el reflecta ideile marilor fondatori ai teoriei funcţiilor reale, la începutul secolului nostru: René Baire, Émile Borel şi Henri Lebesgue. Dealtfel, primul dintre aceştia este autorul unei lucrări celebre *Leçons sur les fonctions discontinues*. Era poate inevitabil ca Stoilow să se simtă atras de această direcţie de

dezvoltare a matematicii, dacă ţinem seama de faptul că atât Borel cit şi Lebesgue i-au fost profesori.

În ianuarie 1920, Stoilow devine conferenţiar de algebră superioară la Universitatea din Iaşi, rămînînd în această funcţie pînă la 12 decembrie 1921, cînd este transferat la Facultatea de ştiinţe a Universităţii din Bucureşti, unde funcţionează în calitate de conferenţiar definitiv de analiză matematică. Dar nici aici nu rămîne mult, fiind transferat, la 1 aprilie 1923, la Facultatea de ştiinţe a Universităţii din Cernăuţi, unde funcţionează ca profesor titular de teoria funcţiilor şi algebră superioară. Asupra activităţii lui Stoilow la această universitate trebuie să insistăm, deoarece a rămas aici timp de 16 ani.

Universitatea din Cernăuţi avea o tradiţie glorioasă. Pînă în 1918, funcţionaseră aici ca profesori matematicieni de renume, ca Hans Hahn (cărui Stoilow i-a dedicat un articol pe care-l reproducem în volumul de faţă) şi J. Plemelj (cu rezultate importante în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale), care ulterior a devenit profesor la Universitatea din Zagreb. Evenimentele care au survenit în anii primului război mondial şi după aceea au creat un gol la Universitatea din Cernăuţi. Din 1918 pînă în 1923 nu a mai funcţionat aici nici un matematician. Timp de peste patru ani, învăţămîntul matematic s-a redus aici la prelegerile pe care le ţinea, însărcinat de Consiliul Facultăţii de ştiinţe, titularul catedrei de istoria filosofiei, care şi el a părăsit mai tîrziu Universitatea din Cernăuţi, fiind chemat la Universitatea din Graz (Austria).

Simion Stoilow este astfel primul matematician român numit profesor la Universitatea din Cernăuţi. Pe atunci, existau la această universitate două catedre de matematică, una de algebră şi alta de geometrie. Stoilow a fost numit titularul primei catedre: „Pînă la sfîrşitul anului şcolar 1923—1924 am fost singurul profesor de matematici al acestei universităţi, fără conferenţiar şi fără asistent” declară Stoilow în *Memoriu asupra activităţii ştiinţifice*, publicat în 1938, la Cernăuţi. Prima sa grijă a fost ca, pe lângă cele două cursuri pe care le ţinea, unul de teoria funcţiilor iar celălalt de algebră superioară, să organizeze biblioteca Seminarului matematic al Universităţii. În urma evenimentelor, această bibliotecă se dezorganizase într-atît, încît nu mai avea nici măcar o încăpere proprie. Stoilow a desfăşurat o activitate intensă de res-

tabilire a bibliotecii, de completare a colecțiilor și de obținere a cărților mai importante. Nu era deloc ușor, deoarece biblioteca nu dispunea de nici o subvenție. Din acest punct de vedere, activitatea lui Stoilow poate fi comparată cu aceea pe care Alexandru Myller a dus-o la Universitatea din Iași, în vederea organizării unei biblioteci de matematică. Desigur, Myller a fost mai norocos. Astăzi, Seminarul matematic Alexandru Myller de la Universitatea din Iași dispune de una dintre cele mai complete biblioteci de matematică din țară. (Mai târziu, o activitate similară la Universitatea din București a fost dezvoltată de Gh. Vrăncianu.)

Stoilow a cerut cu stăruință și, în cele din urmă, a obținut ținerea unui concurs de agregatie pentru catedra vacantă de geometrie, concurs în urma căruia, în toamna anului 1924, a fost numit ca profesor agregat valorosul matematician Octav Mayer, până atunci docent și conferențiar la Universitatea din Iași. Ulterior, Stoilow și Mayer au obținut crearea a câte unui post de asistent și, apoi, a câte unui post de conferențiar la fiecare dintre cele două catedre. În 1929 s-a adăugat și o catedră nouă. Toate aceste măsuri au făcut posibil ca la Facultatea de științe a Universității din Cernăuți să funcționeze câțiva dintre marii noștri matematicieni de mai târziu (dintre care amintim aici, pe lângă cei deja menționați, pe Gheorghe Vrăncianu și pe Miron Nicolescu).

În 1939, an în care este concentrat, pentru o perioadă, la Regimentul de specialități-Cotroceni, Stoilow este transferat la Politehnica din București, unde funcționează ca profesor titular de analiză matematică până în decembrie 1941, ca succesor al lui Gheorghe Țițeica (decedat în 1939). (În august 1941 este mobilizat până în luna octombrie a aceluiași an.) Cursul său la Politehnica din București s-a păstrat în versiune litografiată. A fost publicat în 1940. Pe parcursul a 335 de pagini mult mai mici decât paginile obișnuite ale unei cărți tipărite, Stoilow reușește să prezinte, într-o formă destul de modernă pentru acea vreme, elementele de bază ale analizei matematice (deci atât calculul diferențial cât și calculul integral), ale teoriei ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale, ale câmpurilor de vectori și ale teoriei funcțiilor de variabilă complexă. Considerațiile de tip epsilon sînt introduse în momentele esențiale (de exemplu în definirea noțiunii de limită), dar cu moderație, pentru a nu șoca un

învățămînt obișnuit prea multă vreme cu un alt stil. Echilibrul este tot timpul păstrat între aspectele calitative, de rigoare (de exemplu, proprietățile funcțiilor continue pe intervale închise și mărginite) și cele intuitive și aplicative. Astfel, se menține conceptul de diferențială a variabilei independente x , definite drept „creșterea Δx cînd această creștere este variabilă și variază în jurul lui zero”. Contactul cu lumea fizică este mereu avut în vedere. Desigur, structura acestui curs diferă esențial de aceea a cursurilor pe care Stoilow le-a dedicat studenților matematicieni. Trebuie, aici, să arătăm că în mod cu totul nedrept s-a scris uneori, despre Stoilow, că n-ar fi fost un bun pedagog. Dimpotrivă, el a dovedit — și textele reproduse în volumul de față o confirmă pe deplin — că știa să-și adapteze expunerea la structura auditoriului, pentru a nu mai vorbi despre aspectul intelectual și cultural remarcabil, despre eleganța cursurilor sale.

În decembrie 1941, Stoilow trece la Universitatea din București (pe postul devenit vacant prin pensionarea lui Dimitrie Pompeiu), pe care avea s-o onoreze ca profesor de teoria funcțiilor timp de 20 de ani, până la moartea sa, în 1961. Este momentul în care vin ca profesori la Universitatea din București și alți matematicieni români de seamă, ca Gh. Vrăncianu, Miron Nicolescu (până atunci la Universitatea din Cernăuți), și Gr. C. Moisil (până atunci la Universitatea din Iași). S-a produs astfel un reviriment în întregul învățămînt matematic al Universității bucureștene. În numai cîteva ani, predarea matematicii la această universitate a străbătut lungul drum care desparte pe Cauchy de Leibniz, pe Lebesgue de Riemann și pe Bourbaki de Cauchy. Stoilow are, în această privință, merite considerabile. Avem evident în vedere spiritul general al cursurilor care se țineau la această universitate, deoarece, trecînd la detalii, desigur că nu lipseau din cursurile anterioare anilor 40 o serie de fapte matematice relativ moderne.

Deopotrivă interesat în activitatea științifică de cercetare, în formarea tineretului și în activitatea socială de participare la treburile obștești, Stoilow s-a manifestat plener și cu deosebit succes în toate aceste direcții. Despre rezultatele sale științifice tratează trei expuneri din volumul de față. În ceea ce privește activitatea sa socială universitară, vom menționa mai întîi faptul că a funcționat ca decan

al Facultății de științe a Universității din Cernăuți atât în perioada 1925—1926, cât și în perioada 1938—1939. A fost rector al Universității din București în anii 1944—1946, deci în una dintre cele mai dificile perioade, în care probleme universitare deosebit de grave așteptau să fie rezolvate. Anii importanți marcați de Reforma învățământului din 1948 îl găesc ca decan al Facultății de matematică și fizică a Universității din București. Energia și inteligența pe care Stoilow le-a demonstrat în toate aceste activități rezultă în mod convingător din numeroasele cuvintări și articole reproduse în volumul de față.

Dar Stoilow nu s-a mulțumit numai cu activitatea sa în interiorul universității. A ieșit, ori de câte ori a fost nevoie, în arena socială. Și-a spus cuvântul în presă, atât înainte cât și după cel de al doilea război mondial, în ceea ce privește problemele de bază ale învățământului superior. A fost unul dintre intelectuali români cu atitudine consecvent democratică, antifascistă, atitudine care a culminat cu acțiunea sa din 1944, când devine unul dintre inițiatorii Memoriului adresat lui Ion Antonescu de cîteva zeci de universitari, prin care se cerea încetarea războiului antisovietic și încheierea armistițiului (a se vedea în acest sens ziarul „România Liberă” anul 2 nr. 22, din 8 septembrie 1944). A fost intens preocupat, încă din anii de început ai mișcărilor de dreapta care apăruseră după primul război mondial, de turnura periculoasă a unei părți a tineretului studentesc și a militat pentru păstrarea sensului înalt al activității universitare. Această preocupare este prezentă în cele mai multe dintre manifestările sale publice.

Datorită atitudinii sale consecvent democratice, Stoilow primește, în perioada 1946—1948, sarcina de ministru plenipotențiar al României la Paris. Odată cu înființarea, în 1949, a Institutului de matematică al Academiei (sub direcția lui Dimitrie Pompeiu), Stoilow este numit director adjunct al Institutului, iar în 1954, în urma morții lui Dimitrie Pompeiu, devine director al acestui institut, funcție pe care o păstrează pînă la moartea sa, în 1961.

Membru corespondent al Academiei din 1936, Stoilow devine membru titular al Academiei, în forma ei reorganizată din 1948. A funcționat mulți ani ca președinte al Secției de științe matematice și fizice a Academiei și ca membru al

Prezidiului Academiei. Nici una din aceste funcții nu a considerat-o ca o simplă formalitate. Stoilow a manifestat un mare interes pentru ameliorarea vieții academice, venind mereu cu propuneri în acest sens. În partea a doua a acestei prezentări vom relata unele fapte semnificative în acest sens. De asemenea, Stoilow a fost unul dintre membrii fondatori ai A.R.L.U.S.-ului (și vicepreședinte al ei) și unul dintre membrii conducerii Societății pentru Răspîndirea Științei și Culturii. A fost deputat în Marea Adunare Națională, dezvoltînd, în circumscripția sa electorală, o activitate neobosită de comunicare și dezbateră cu cetățenii care l-au ales. În arhiva Stoilow se află scrisori pe care Stoilow le-a primit, în calitatea sa de deputat, de la alegătorii săi și documente care mărturisesc despre contactele lui Stoilow cu diferite instituții, în vederea rezolvării unor probleme ale cetățenilor.

Începînd cu anii 1950, Stoilow începe activitatea sa de formare a ceea ce avea să constituie mai tîrziu Școala românească de teoria funcțiilor, una dintre cele mai puternice școli științifice românești, din care s-au ramificat ulterior alte cîteva școli, de teoria potențialului, de evisconformitate, de spații analitice și teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe. În toate aceste domenii, elevii profesorului Stoilow s-au arătat la înălțimea maestrului lor, iar rezultatele pe care ei le-au obținut sînt folosite și recunoscute de specialiști din întreaga lume. Seminarul științific înființat de Stoilow la Institutul de matematică este în continuare viu, datorită acestor elevi ai săi și datorită elevilor elevilor săi. Mari specialiști ai teoriei funcțiilor, ca R. Nevanlinna și L. V. Ahlfors, au elogiât activitatea românească în acest domeniu iar unul dintre ei a numit Bucureștiul capitala mondială a teoriei funcțiilor de variabilă complexă. De asemenea, un Seminar româno-finlandez, care are loc periodic, continuă tradiția de colaborare statornică de profesorul Stoilow cu matematicienii finlandezi, teoria funcțiilor fiind unul dintre domeniile în care matematica finlandeză a excelat, în primul rînd prin cei doi reprezentanți amintiți mai sus.

Un rol important l-a avut Simion Stoilow în organizarea celui de al IV-lea Congres al matematicienilor români din anul 1956, în calitatea sa de președinte al comitetului de organizare. În această activitate a fost sprijinit de profesorul

Nicolae Teodorescu, secretarul comitetului de organizare a acestui congres.

Pentru meritele sale deosebite, Stoilow a fost decorat în 1934 cu „Meritul Cultural pentru Știință”, după ce, în 1928, primise din partea francezilor „Legiunea de Onoare”. În 1946 primește „Steaua României” cu grad de mare ofițer, în 1948 „Steaua Republicii Populare Române” clasa a II-a, apoi „Ordinul Muncii” clasa I, „Steaua Republicii Populare Române” clasa I (în 1952), „Premiul de Stat” clasa I (în 1954), „Ordinul 23 August” clasa a III-a. A fost membru al Societății de științe matematice și fizice din R.P.R., membru de onoare al Societății de științe matematice din Belgia, membru al Societății matematice din Franța. A funcționat ca membru în numeroase comitete de redacție ale unor publicații matematice prestigioase, românești și străine, ca „Mathematica” (Cluj), „Revue de Mathématiques de l'Union Interbalcanique” (Atena), „Compositio Mathematica” (Groningen), a condus mulți ani, după 1950, revistele academice românești de matematică.

Invitat la numeroase universități străine pentru lecții și conferințe, S. Stoilow a onorat aceste invitații cu expuneri de o mare originalitate. Astfel, în 1931 a prezentat un ciclu de șase conferințe la Facultatea de științe din Paris (despre teoria topologică a funcțiilor analitice) și în același an a prezentat o conferință (pe aceeași temă) la Universitatea din Strasbourg. Tot în 1931 prezintă două conferințe (despre aspectele moderne ale noțiunii de funcție) la Universitatea din Bruxelles. În 1937 prezintă trei conferințe la Facultatea de științe din Paris (despre acoperiri continue și acoperiri riemanniene), o conferință la Universitatea din Hamburg (despre bazele topologice ale teoriei funcțiilor de variabilă complexă), o conferință la Münster (pe o temă similară), o conferință la Lvov (asupra definiției suprafețelor riemanniene) și una la Amsterdam (despre caracterizarea topologică a funcțiilor analitice). În 1939 prezintă o conferință la Berlin (relativă la suprafețele riemanniene), în 1945 o conferință la Academia de Științe a U.R.S.S., Moscova, cu prilejul aniversării a 220 de ani de la înființarea Academiei U.R.S.S. (despre suprafețele Riemann cu frontieră nulă), iar în 1947 trei conferințe la Facultatea de științe a Universității din Paris (despre funcțiile care corespund suprafețelor Riemann cu frontieră nulă) și altele nu le mai menționăm, la Varșovia, Budapesta, Helsinki, Roma etc.

A fost membru în Comitetul de conducere al Asociației Române a Oamenilor de Știință, afiliată la Federația Mondială a Oamenilor de Știință.

În 1950 a publicat, sub formă litografiată, un curs de teoria funcțiilor analitice, urmat de o a doua parte, în 1953 (Litografia Facultății de matematică și fizică a Universității din București). În 1954, respectiv 1958, publică, la Editura Academiei, cele două volume ale cărții *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă* (volumul al doilea) în colaborare cu Cabiria Andreian Cazacu). În 1956 apare, la Gauthier-Villars (Paris), ediția a II-a, adăugită, a monografiei sale din 1938, *Leçon sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* [39], iar în 1962 apare la Editura didactică și pedagogică manualul său *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, ed. a II-a a lucrării [71]. La Moscova apare în 1962 versiunea în limba rusă a tratatului în două volume [71], [72], iar în 1964 versiunea în limba rusă [65] a celei de a doua ediții a monografiei [39] publicată la Paris.

Să mai menționăm faptul că S. Stoilow este autorul a numeroase articole de cultură matematică, științifică, general filozofică, pe care numai în mică parte le-am putut reproduce în paginile care urmează. Din păcate, nici despre cursurile sale redactate nu am putut avea o informație completă. Astfel, nu am avut posibilitatea de a consulta cursul litografiat intitulat *Lecții de algebră superioară: teoria corpurilor și teoria lui Galois* (Cernăuți, 1937—1938), care chiar după titlu indică o orientare deosebit de modernă pentru momentul în care a apărut.

Rămâne ca o documentare ulterioară să ne edifice asupra aspectelor pe care nu le-am putut cuprinde în textul de față.

*

Vom face acum o incursiune în arhiva Stoilow. Din foi îngălbenite, vom desprinde fapte care, într-un fel sau altul, ne apropie mai mult de personalitatea sa științifică și umană, ne dezvăluie profilul său moral și orizontul său cultural. Firul expunerii nu urmează nici criteriul cronologic, nici pe cel tematic, ci exclusiv pe cel al documentelor la care se referă.

Ca director adjunct al Institutului de matematică (director fiind Dimitrie Pompeiu care, datorită vârstei înaintate, nu se mai putea ocupa de treburile institutului), Stoilow ținea un caiet revelator pentru conștiinciozitatea cu care își îndeplinea atribuțiile. Iată, de exemplu, câteva pagini în care sînt consemnate activități din anul 1949. Institutul, abia înființat, avea nevoie de bibliotecă, trebuia să organizeze comenzi de cărți și reviste de specialitate din străinătate. Stoilow se ocupa personal de această problemă, ia legătură cu diferite persoane particulare dispuse să vîndă cărți de matematică valoroase, elaborează liste de comenzi de cărți și reviste, pe care le predă bibliotecii Academiei, pentru schimburi cu străinătatea. Manifestările de birocratie, neglijență și neînțelegere, pe care le întâlnește la unii funcționari, nu-l descurajează; persistă în acțiunea sa, fiind sprijinit de ceilalți matematicieni din institut și colaborînd tot timpul cu Facultatea de matematică și fizică a Universității. În primele luni ale anului 1949, Institutul nu avea încă un local adecvat, dar Biroul Prezidiului Academiei promisese un local în str. Romană 47 (actualmente str. Eminescu). Pînă la obținerea acestui local, Stoilow a organizat ședințele Institutului în cabinetul său de la facultate. La propunerea lui Stoilow, se obține posibilitatea (care ulterior a devenit regulă), ca toate cărțile și revistele de strictă specialitate matematică primite de către Biblioteca Academiei să fie transferate institutului de profil.

Dar Stoilow nu se mulțumește să militeze pentru rezolvarea problemelor instituționale, ci se ocupă asiduu și de problemele personale ale celor care lucrează în institut, de la cercetători la funcționari. Se interesează de cei care au nevoie de locuință, de cei care sînt tergiversați în rezolvarea treburilor lor la diferite instituții, consumîndu-și astfel un timp prețios, răpit activității de cercetare. Intervine efectiv pentru rezolvarea acestor probleme, nemulțumindu-se cu soluții de moment, ci revendicînd o ameliorare generală a activității instituțiilor care lucrează cu publicul. Iată un fragment edificator în acest sens: „La percepție oamenii stau ore întregi ca să-și poată achita impozitele, sînt busculați și brutalizați uneori... se obține a) exasperarea cetățenilor, b) întîrzieri în plata impozitelor către stat, c) sustragerea oamenilor din cîmpul muncii de la orele de producție ... (La percepția „C. A. Rosetti” lucrează cu publicul un singur

funcționar, în timp ce ceilalți stau, sub pretext că ei au alte atribuții).

Stoilow consemna cu regularitate elementele semnificative care apăreau în cadrul ședințelor cu colectivele de probleme ale Institutului de matematică, reținînd cu deosebire ceea ce îi revenea ca preocupare ulterioară și ceea ce îl interesa pentru cultura sa personală. Iată câteva exemple. Pe marginea ședinței din 27 ianuarie 1951 cu colectivul I (Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale) observă că „generalizările (algebrice) ale teoriei funcțiilor complexe nu merg mai departe decît integrala lui Cauchy. Ele pot atunci da o soluție problemelor analoage cu a lui Dirichlet, dacă se ține seama de condițiile (relațiile integrale) referitoare la valorile date pe contur (Gr. Moisil)”. Cu acest prilej, Stoilow își amintește de căutările sale din vremea studenției, privind singularitățile integralelor ecuațiilor cu derivate parțiale și caracteristicile ecuațiilor.

Relativ la ședința din 14 februarie 1951, cu colectivul III (Spații și grupuri topologice și cercetări de geometrie diferențială) în mare se menționează: „Barbilian cere referatul ce mi l-a dat în toamnă. Insistă asupra colaborării Vranceanu-Barbilian”. Ar fi interesant să se afle detalii asupra acestei colaborări. Poate că ele sînt consemnate în memoriile lui Gh. Vranceanu, predate pentru publicare editurii „Scrisul românesc” din Craiova.

Din ședința cu colectivul V (Evoluția noțiunilor fundamentale ale matematicii), din 26 februarie 1951, este reținută promisiunea lui Gabriel Sudan de a publica un tratat asupra fracțiilor continue (tratate care, dealtfel, a și apărut ulterior), cu interpretări geometrice date de Klein și completate de Sudan. Dar, observă Stoilow, este vorba nu numai de fracții continue „regulate” în sensul clasic, ci și de șirurile mai generale (Stieltjes), unde numărătorul nu este neapărat 1. Referindu-se la elogiul adus de Mihail Neculcea tratatului lui Bourbaki, pentru rigoarea sa, și la regretul lui Neculcea pentru absența din partea teoretică din tratat a unor noțiuni utile ca aceea de punct de acumulare, Stoilow adaugă: o absență ca aceasta caracterizează dealtfel un aspect al spiritului tratatului.

Deosebit de meticuloase sînt notele privind organizarea congresului de matematică din 27 mai 1956; se observă preo-

cuparea de a se asigura o participare cât mai prestigioasă a matematicienilor din alte țări. Sînt consemnate legături cu citeva zeci de academii de științe europene, americane și asiatice, precum și legături personale cu unii mari matematicieni ca Hadamard, Denjoy, Eilenberg, Blaschke etc. (despre care se știe de altfel că au participat la congres). În același timp, se preocupă de întocmirea rapoartelor românești, alcătuiind în acest scop cinci colective, pe domenii de specialitate. După cum se știe, al patrulea Congres al matematicienilor români din 1956 a reușit un mare succes, în bună măsură datorită activității depuse în acest sens de Stoilow.

Un întreg dosar din arhiva Stoilow se referă la activitatea sa ca deputat în Marea Adunare Națională din partea circumscripției electorale Dorobanți (București). Departamentul de a vedea în această atribuție o simplă formalitate, Stoilow s-a arătat plin de solicitudine și de sensibilitate față de doleanțele cetățenilor din circumscripția sa electorală și față de unele probleme generale ale cartierului respectiv al Bucureștiului. A urmărit personal desfășurarea lucrărilor de construcții: la platoul Studioului București din Bd. Kalinin, la sala sporturilor (Floreasca) și la blocurile de locuințe din Calea Dorobanți colț cu str. Naum Romniceanu și din Piața Dorobanți, la pavarea a 22 de străzi. A urmărit lucrările de canalizare, de amenajare a spațiilor verzi, de dezvoltare a rețelei comerciale, de realizare a unor obiective social-culturale. S-a preocupat de amenajarea și extinderea unor clase la liceul Caragiale și la școlile Floreasca, Monceanu și Căderea Bastiliei. Stoilow consemnează: „Numărul de elevi a crescut de opt ori față de anul 1950, iar neștiința de carte poate fi considerată lichidată”. A urmărit radioficarea cartierului Dorobanți-Floreasca și amenajarea spitalului I. C. Frimu, unde s-a sporit capacitatea și s-au creat secții noi. Indică apoi sumele afectate pentru dotarea și buna întreținere a fondului de locuințe din sectorul I al Capitalei în perioada 1952–1956 și pentru imobilele din cuprinsul circumscripției electorale Dorobanți, în aceeași perioadă.

Cu mare scrupulozitate sînt consemnate problemele ridicate de cetățeni: edilitate, de transport în comun, de aprovizionare, de învățămînt, de cazare etc. O bătrînă i se plînge că are o locuință insalubră, altul este disperat că locuiește

într-un garaj ș.a.m.d. La toate aceste solicitări, Stoilow a reacționat prompt, prin memorii și intervenții directe adresate forurilor în cauză. Au rămas nu numai ciorne ale unor astfel de memorii dar și răspunsuri ale forurilor respective la aceste memorii. Iată, de exemplu, un răspuns dat de Sfatul popular al raionului Tudor Vladimirescu (datat 8 februarie 1957) care recunoaște, în spirit autocritic, carențele semnalate de Stoilow și arată măsurile luate pentru a se îmbunătăți întreaga activitate în domeniul spațiului locativ. Sînt indicate detaliat aceste măsuri, avînd ca scop o servire mai promptă și mai eficientă a publicului, în primul rînd un număr mult mai mare de ore de audiență a cetățenilor în probleme de spațiu locativ, un număr mai mare de funcționari care urneau să se ocupe de rezolvarea acestor probleme.

Un fapt semnificativ pentru modestia autentică și pentru cîntărea exemplară a lui Stoilow îl constituie o cerere, datată 2 decembrie 1958, pe care Stoilow o adresează Sfatului popular al raionului Tudor Vladimirescu (de care aparținea strada Dr. Burghilea, unde locuia) într-o problemă de spațiu locativ privind propria sa familie. Pe copia acestei cereri găsim, scris de mîna lui Stoilow: „Rămas fără răspuns”. Într-un moment în care era academician, deputat în Marea Adunare Națională, membru în Prezidiul Academiei, director al Institutului de matematică și beneficia de numeroase relații cu persoane de mare răspundere, datorită prezenței sale active în viața politică și intelectuală (fost ambasador, fost rector al Universității din București, fost decan al Facultății de matematică-fizică), Stoilow nu s-a prevalat de nici una dintre aceste situații și relații și s-a adresat, pentru rezolvarea unei probleme personale, ca orice cetățean, pe calea regulamentară a unei cereri adresate instituției de resort. Nici măcar atunci cînd a văzut că răspunsul la cererea sa întîrzie, nu s-a prevalat de situația sa socială, pentru a dobîndi un avantaj. Acesta era Stoilow!

Numeroase documente din arhiva Stoilow atestă activitatea sa deosebit de intensă din perioada imediat următoare înființării Academiei (1948), în vederea stimulării creației matematice românești Stoilow propune, în cadrul Secției de științe matematice și fizice, ca Institutul de matematică și fizică să fie separat în două institute, unul de matematică și altul de fizică, iar ca director al Institutului de matematică

să fie numit Dimitrie Pompeiu, ceea ce s-a și întâmplat la începutul anului 1949. Duce o activitate neobosită pentru crearea unor periodice matematice românești în măsură să înregistreze în mod operativ cele mai importante rezultate obținute de către matematicienii români și să le difuzeze în lumea științifică internațională. În martie 1949 apare prima fascicolă a Buletinului științific seria A, care cu greu face față producției matematice din ce în ce mai impetuoase (la fiecare ședință săptăminală a Institutului de matematică se prezentau 4—5 comunicări originale). Se interesează personal de tipografiile care dispun de caractere matematice speciale, pentru a asigura cele mai bune condiții de imprimare a articolelor de matematică, recomandând în acest sens tipografia „Rotativa”. De asemenea, în acel moment în care posibilitatea obținerii de cărți și reviste de specialitate din străinătate era încă destul de redusă, întreprinde demersuri pentru cumpărarea unor biblioteci științifice particulare (de exemplu, biblioteca lui Eugen Neculcea, tatăl profesorului de mai târziu al Facultății de matematică, Mihail Neculcea). De asemenea, se preocupă de trimiterea unor publicații științifice la bibliotecile institutelor de învățământ superior create în acea perioadă în întreaga țară, ca rezultat al Reformei învățământului din 1948 (de exemplu, la Institutul carbunelui din Petroșani). Aceste acțiuni pot să pară acum lipsite de o semnificație deosebită; dar examinarea arhivei Stoilow dezvăluie o sumedenie de dificultăți și rezistențe, unele din ele chiar în interiorul Academiei, pentru a căror depășire Stoilow a desfășurat o energie considerabilă. Instabilitatea care se manifesta încă în țară, la numai câțiva ani de la terminarea celui de al doilea război mondial, lipsa de experiență în ceea ce privește crearea unui cadru instituțional și organizatoric cât mai adecvat unor realități fără precedent în istoria României, dificultățile economice și politice, războiul rece, excesele bine cunoscute ale acelei perioade și, drept consecință, abuzurile săvârșite de unele persoane cu răspunderi (a se vedea întreaga literatură a „obsedantului deceniu”), erau tot atâtea frâne în declanșarea marilor energii culturale ale poporului. Dacă ar fi să ne referim numai la primii ani de apariție a revistelor de matematică ale Academiei, ar trebui să consemnăm activitatea neobosită a lui Stoilow (ajutat, evident, de ceilalți matematicieni, ca Gh. Vrân-

ceanu, Miron Nicolescu și Gr. Moisil) pentru publicarea regulată a acestora. Iată, de exemplu, intervenția lui Stoilow la sesiunea generală a Academiei, din martie 1952. Stoilow se arată deosebit de îngrijorat de faptul că din aproximativ 150 de lucrări prezentate și acceptate în 1951 numai 30 apăruseră, iar revistele „Studii și cercetări de matematică” și „Studii și cercetări de fizică” nu publicaseră decât 50% din materialul planificat pentru 1951, în timp ce „Comunicările Academiei” (prevăzute să apară lunar) publicau în martie 1952 abia numărul din iulie 1951 și nu pentru că ar fi dus lipsă de articole. Ceva mai târziu însă, prin efortul susținut al conducerii Institutului de matematică și în primul rând al lui Stoilow, care era și președintele Secției de științe matematice și fizice a Academiei, revistele de matematică și-au putut normaliza apariția, deși a continuat să se manifeste o lipsă de consecvență, concretizată în prea dese reorganizări ale publicațiilor.

Preocupat de recrutarea de cadre de cercetare valoroase și de introducerea în învățământul nostru matematic superior a unor domenii moderne ale matematicii, Stoilow a urmărit cu mare atenție evoluția tineretului nostru matematic, pentru a-i alege pe cei mai buni atât la catedre cât și la Institutul de matematică (în anii 50 era nu numai director adjunct al Institutului de matematică ci și decan al Facultății de matematică și fizică a Universității din București). Se crease atunci un moment de confuzie a valorilor. Înființarea unui mare număr de institute de învățământ superior și dezvoltarea vertiginoasă a celor existente au dus la o creștere bruscă a numărului de studenți și la o nevoie acută de cadre didactice, nevoie care cu greu putea fi satisfăcută cu efectivul existent de matematicieni, cu atât mai mult cu cât matematica se predă în evazitotalitatea institutelor de învățământ superior (cu precădere politehnice și economice) nou create. În aceste condiții, au fost promovate în învățământul superior numeroase cadre didactice din învățământul mediu. Unele dintre acestea au dat un randament corespunzător, altele însă n-au reușit să se încadreze în viața universitară, rămânând departe de activitatea de cercetare și neridicându-se la cultura științifică necesară unui cadru didactic universitar. Dacă Facultatea de matematică și fizică din București a fost mai puțin contaminată de aceste efecte

negative, aceasta se datorează în bună măsură lui Stoilow. Copii după unele memorii adresate, în acei ani, forurilor superioare, pentru a se obține numirea celor mai valoroase elemente în posturile didactice ale facultății și pentru a se evita ocuparea lor de elemente necorespunzătoare rămân mărturie în acest sens. Un singur exemplu: se luptă pentru a obține promovarea tinerei matematiciene Cabiria Andreian, contra celor care „sabotează numirea elementelor valoroase recomandate de facultate, elemente cărora nu li se poate reproșa nimic nici din punct de vedere moral, nici din punct de vedere politic”. Într-un memoriu adresat forurilor superioare la 13 aprilie 1951 se referă la dorința sa de a fi eliberat din funcția de decan, care îi ia prea mult timp, nemaiputând astfel să facă față îndatoririlor sale la Academie și la Institut. „Am speranța că, în curând, Ministerul își va fi fixat alegerea asupra succesorului meu, pe care îl caută de un an; dar doresc să las acestui succesor mai tânăr o situație clară și sănătoasă în facultate”. Acest succesor avea să fie profesorul Gheorghe Mihoc, care a știut să mențină în universitate aceeași exigență și aceeași calitate pe care le promovase cu atita abnegație Simion Stoilow. Venind cu un imens prestigiu științific, politic și moral și cu o imensă dorință de a menține continuitatea învățămîntului și cercetării matematice, în linia tradițiilor unor mari înaintași ca Pompeiu, Țițeica, Lalescu, Spiru Haret și David Emmanuel, Stoilow s-a preocupat intens și într-o bună măsură a reușit să-i apere pe unii oameni de știință de anumite excese și abuzuri ale acelei perioade atât de contradictorii din anii care au urmat imediat celui de al doilea război mondial. A știut să lupte contra tuturor formelor de demagogie care, prevalîndu-se de unele lozinci ale momentului, promovau incompetența și nonvaloarea. Nu a precupețit din timpul său pentru a-i demasca pe cei care, indiferent de poziția pe care o ocupau, sabotau noul elan al științei românești.

Un alt aspect al activității sociale a lui Stoilow se referă la reprezentarea cu deosebită competență și demnitate a intereselor culturii românești în lume. Stoilow a militat pentru un metabolism cât mai sănătos și mai echilibrat al culturii și științei românești, o circulație în ambele sensuri — dinspre cultura românească spre celelalte culturi și dinspre acestea din urmă spre cea dintîi. Dacă

în țară a luptat pentru editarea unor periodice științifice în limbi internaționale, care să ducă în lume mesajul realizărilor supreme ale creației noastre științifice, în străinătate a fost în permanență preocupat de a face cunoscute realizările noastre, de a stabili legături multiple cu instituțiile care puteau prezenta interes pentru țara noastră. Vom da un singur exemplu, pe care însă îl vom expune în detaliu, pentru a se vedea înaltul patriotism al lui Stoilow, capacitatea sa de a se orienta în situații inedite, profunda sa înțelegere culturală și politică a unor medii sociale dintre cele mai eterogene. Ne vom referi la misiunea care i s-a încredințat de către Institutul român pentru relațiile culturale cu străinătatea de a conduce delegația care urma să participe în perioada 16 noiembrie — 7 decembrie 1955 la manifestările organizate de Asociația franceză „France-Roumanie” cu prilejul zilelor prieteniei franco-române. Momentul era delicat, deoarece venea după o perioadă de mai mulți ani în care legăturile noastre tradiționale cu Franța scăzuseră sensibil, iar lui Stoilow i se încredințase și misiunea de a relua contactul cu cercurile științifice și culturale franceze, de a stabili legături cu persoane, cu reprezentanți de seamă ai vieții politice și ai presei. Din această hibernare a unor relații încorporate în însăși istoria culturii noastre trebuia găsită o ieșire, iar această sarcină dificilă i-a fost încredințată lui Stoilow, care urma să spargă gheața și să determine eventual pe unii exponenți ai culturii și vieții publice franceze să întreprindă călătorii de informare în țara noastră, pentru a se restabili în acest fel încrederea necesară unei colaborări reciproc avantajoase. În raportul asupra îndeplinirii acestei misiuni, Stoilow arată că a căutat în toate împrejurările și convorbirile pe care le-a avut în Franța să nu se lase indus în eroare de unele manifestări de prietenie sau de simpatie care — venind din partea unora dintre aceia cu care avusese legături personale mai vechi — i se adresau poate într-un mod prea personal; s-a străduit totdeauna să vadă mai departe și mai adînc. După trei săptămîni de ședere la Paris și după contactele foarte variate pe care le-a avut, a considerat că poate afirma că — în marea majoritate a cazurilor — interesul pentru România este real și viu. De la oamenii de știință de specialitatea sa sau de specialități

înrudite pînă la ziaristi sau directori ai marilor cotidiane franceze, trecind priu reprezentanți ai altor științe, prin oameni de cultură — angajați sau nu în diferite acțiuni politice sau ideologice — cei mai mulți au răspuns în mod favorabil la ideea de a întreprinde o călătorie de informare în România. Această, în ciuda faptului că cei mai mulți dintre cei pe care Stoilow i-a contactat în acest sens nu erau membri ai Partidului Comunist Francez, și nici nu aveau legături cu acest partid, unii fiindu-i chiar ostili. Pentru a arăta nivelul ridicat al personalităților franceze pe care Stoilow le avea în vedere, vom menționa pe cîțiva dintre ei: prof. Mario Roques, membru al Institutului Franței (Academia de științe morale și politice), filolog romanist de renume mondial; prof. Labrousse de la Sorbona, istoric și economist, socialist; André Bollack, directorul ziarului marelui finanț parizien „l'Information”; J. de Beer, scriitor, secretar general al Pen-Clubului. Anii războiului (cald) urmați de anii războiului rece își manifestau încă profund consecințele nefaste. Numai o parte foarte redusă din francezii care nutreau sentimente de simpatie și un interes real pentru România erau atunci grupați în Asociația „France-Roumanie”, datorită pur și simplu faptului că această asociație era încă foarte puțin cunoscută în Franța. Mijloacele ei de comunicare cu publicul erau foarte reduse iar asociația ca atare nu era încă recunoscută oficial de direcția relațiilor culturale din Ministerul de externe francez, așa cum erau recunoscute alte asociații similare. Poate că și caracterul prea vădit politic al acestei asociații, în anii imediat următori eliberării Franței, a contribuit la aceasta, dînd loc la o interpretare greșită a rostului ei. Noua conducere alesese o linie mai potrivită scopului urmărit și reușise astfel să atragă unele elemente aparținînd altor cercuri și cu alte tendințe ideologice decît ale partidului comunist. În cadrul manifestărilor organizate cu prilejul „zilelor prieteniei franco-române” s-a dat, la teatrul de la Porte Saint-Martin din Paris, în seara de 14 noiembrie 1955, o reprezentație de gală la care au fost invitați și au participat aproximativ 1200 de persoane. S-a jucat (în limba franceză) *Conu Leonida față cu reacțiunea* de Caragiale. De asemenea, s-a montat o piesă prelucrată după *Hanu-Ancuței* de Sadoveanu, programul fiind completat cu recitări și muzică de

George Enescu, Sabin Drăgoi și Ion Dumitrescu. Regia artistică a aparținut lui Julien Berteaux, de la Comedia franceză, unul dintre cei mai de seamă artiști ai teatrului francez.

Am dat toate aceste detalii, pentru a se vedea noul spirit, de deschidere, în care erau concepute relațiile culturale româno-franceze, spirit la a cărui promovare Stoilow a avut un rol esențial. Stoilow și-a dat seama că trebuia să înfrîngă o suspiciune creată de o întreagă propagandă ostilă, aceea că în noua România cultura nu s-ar bucura de atenția cuvenită. A căutat să imprime întregii vizite un caracter esențialmente cultural. După vizite ale delegației române la sediul Asociației France-Roumanie, la muzeul de artă populară și la biblioteca și muzeul Comediei franceze, Stoilow face, în ziua de 22 noiembrie 1955, la Casa ziaristilor, o expunere magistrală la o conferință de presă la care participă reprezentanți ai diferitelor ziare franceze. Stoilow se axează asupra realizărilor românești recente în domeniul social și cultural și invită apoi auditoriul să formuleze întrebări. La 3 decembrie 1955 ia parte împreună cu întreaga delegație română la adunarea generală a Asociației „France-Roumanie”, unde discută modalități concrete de stringere a relațiilor culturale între cele două țări, răspunzînd, ca și la expunerea sa anterioară, la numeroase întrebări. La 30 noiembrie 1955, Stoilow conferențiază la Sorbona, unde nu se mulțumește să prezinte rezultatele științifice personale obținute în ultimii ani, ci atrage atenția și asupra unor rezultate ale noii generații de matematicieni români, reliefind semnificația lor deosebită. În cursul numeroaselor întîlniri cu matematicieni francezi, Stoilow insistă asupra mișcării matematice din țara noastră, de o amploare necunoscută anterior, și subliniază importanța celui de al patrulea Congres al matematicienilor români, care urma să aibă loc la București, între 27 mai și 4 iunie 1956. Acțiunea lui Stoilow în această privință are un deosebit efect. Matematicienii francezi se conving de valoarea noii generații de matematicieni români și participă la congresul amintit prin cei mai iluștri reprezentanți ai ei. Cultura românească își găsește în Stoilow un ambasador strălucit, pe care Franța, prin ce are ea mai bun, îl onorează și, prin el, onorează țara pe care el o reprezintă. Decanul Facultății de științe din Paris, prof. Pérès, oferă un dejun în onoarea lui Stoilow

și Kolmogorov (mare matematician sovietic, aflat și el atunci la Paris). Este invitat la 21 noiembrie la o sedință a Academiei de științe, unde J. Hadamard prezintă trăsăturile esențiale ale operei sale științifice. Este apoi invitat, la 5 decembrie, la sedința solemnă anuală a Academiei de științe, unde celebrul fizician Louis de Broglie, secretar perpetuu al Academiei, ține o conferință despre Einstein, care tocmai murise în acel an.

Stoilow nu i-a pierdut din vedere pe acei mari oameni de știință români care încă mult timp înainte de război se stabiliseră în Franța. Un moment emoționant, în această privință, îl constituie întâlnirea sa cu marele fizician de origine română (stabilit în Franța încă din 1930) Alexandru Proca, pe care îl invită să viziteze România. Din nefericire însă, îl găsește pe Proca grav bolnav de cancer, internat într-un sanatoriu și fără speranțe de restabilire. Proca s-a arătat foarte mișcat de invitația care i s-a adresat, și-a exprimat dorul de țara sa natală, dar el avea să moară la scurt timp după întoarcerea lui Stoilow în țară.

Stoilow era conștient de marea răspundere cu care era investit, în acel moment, o călătorie a sa în străinătate. Trebuind, în septembrie 1955, să participe la un congres matematic în Italia și primind prea târziu pașaportul, în așa fel încît, în cel mai bun caz, ar fi sosit în ultima zi a congresului, Stoilow refuză să mai plece, adresînd președintelui Academiei un memoriu, în care explică refuzul său de a mai pleca. „Aceasta ar fi însemnat suportarea de către statul nostru a unor importante sacrificii materiale fără nici un folos obștesc, în afară de alte prejudicii aduse țării și renumelui ei. Socot că a fi plecat, totuși, în asemenea condiții, în fruntea unei delegații devenită inoperantă — numai pentru o plimbare în Italia pe contul statului român, astfel după cum, în mod indirect, hotărîrea comisiei de pașapoarte părea a ne invita — ar fi fost cu totul incompatibil cu conștiința unui membru de partid trimis în delegație oficială. Dată fiind însemnătatea pe care, în concepția și în politica partidului, o ocupă problema relațiilor noastre științifice și culturale internaționale, cred de datoria mea să aduc la cunoștință partidului cele de mai sus”.

Acest memoriu, scris la 6 octombrie 1955, nu este o manifestare izolată în activitatea lui Stoilow. Două luni mai

tîrziu, aflat în Franța pentru o perioadă de trei săptămîni, se străduiește de a folosi fiecare zi, fiecare oră, pentru a se face folositor intereselor supreme ale țării care l-a trimis la Paris în fruntea unei delegații culturale. Reușește să întâlnească un număr uimitor de mare de personalități franceze; pe lîngă cei deja menționați, mai întâlnește pe Georges Rivière, directorul muzeului național de artă populară și folclor din Paris, pe Wurmser, profesor de biologie la Sorbona, pe Labrousse, profesor de istorie la Sorbona, pe marele matematician francez Maurice Fréchet, pe directorul ziarului „Le Monde”, Beuve Méry, pe A. Bollack, directorul ziarului „L'Information” și pe Martin Chauffier, directorul publicației „Le Nouveau Fémina — L'Illustration”, pe Eugénie Cotton, președinta Federației Mondiale a Femeilor, pe Jacques Duclos, secretar al P.C.F., pe André Wurmser, scriitor și redactor la „Les lettres françaises”.

Una din preocupările permanente ale lui Stoilow, ori de cîte ori se afla în străinătate, era aceea de a ameliora schimburile de informații științifice cu țara noastră. „Socot că este cazul ca, ieșind din faza sentimentală a declarațiilor de prietenie, să se treacă la unele măsuri practice și concrete cu adevărat folositoare ambelor țări” se exprimă el în raportul său asupra călătoriei la Paris, după care face critici și propuneri concrete de ameliorare a situației: „Schimbul de publicații științifice să devină o realitate. În principiu, acest schimb — în special între Academie și diferite instituții științifice franceze se face, dar într-un mod atît de neregulat, cu atîtea pierderi de numere izolate ale periodicelor respective, încît cea mai mare parte din colecțiile noastre sînt grav descompletate. Pe de altă parte, cele mai importante biblioteci de specialitate din Paris nu au decît foarte puține colecții complete ale publicațiilor noastre. Listele pe care le-am cerut acestor biblioteci arată lacunele foarte importante în colecțiile respective. Voi preda aceste liste bibliotecii centrale a Academiei”. Stoilow semnalează, în continuare, unele deficiențe ale serviciilor poștale, care pur și simplu au înapoiat Academiei de științe din Paris, timp de cîteva luni, numerele din publicația „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris”. La intervenția energică a lui Stoilow s-a pus capăt acestei situații.

Stoilow face apoi propuneri concrete privind schimburile de oameni de știință (cu precădere în domeniul fizicii), de artiști și de expoziții de artă. Descoperind faptul că, datorită opoziției autorităților franceze, a fost împiedicat un turneu al Comediei franceze la București, Stoilow întilnește pe directorul relațiilor culturale din Ministerul de externe francez, stabilind astfel modul de depășire a acestor dificultăți, prin tratative directe de la guvern la guvern, prin intermediul reprezentantului oficial al Franței la București.

Un alt aspect important al activității postbelice a lui Stoilow se referă la apărarea acelor oameni de știință care au slujit cu abnegație știința și învățămîntul, dar care, datorită unor confuzii, abuzuri sau unor situații întimplătoare, riscuau să fie victimele unor măsuri care, în intenția lor, erau orientate asupra celor care aduseseră prejudicii grave, prin manifestări și atitudini profasciste în perioada 1938—1944. Acesta a fost sensul unor epurări din rîndul cadrelor didactice universitare, în primii ani după 23 August 1944. Dar în atmosfera de precipitare a acelor ani, de patimi nestinse, de neliniște și nesiguranță, abuzurile și greșelile nu puteau fi totdeauna evitate. Cu simțul său profund de echitate și măsură, Stoilow a sesizat cele câteva anomalii de natură să afecteze persoane nevinovate. S-a adresat imediat ministrului învățămîntului. „Mai întîi trebuie să declar că nici unul dintre cazurile pe care le voi cita nu-mi pare a fi fost determinat realmente de considerațiuni politice, dar nu sînt convins că, în nici unul din ele, ambiții personale (cel puțin prea grăbite) n-au jucat vreun rol. Mai trebuie să menționez că nici unul din cazurile acestea nu se referă la Facultatea de matematică și fizică al cărei decan sînt; nici la vreo altă facultate similară de la celelalte universități din țară”. Urmează apoi specificarea cîtorva cazuri de epurări, după părerea lui Stoilow, nejustificate; ele se referă la patru profesori de la facultățile de farmacie, construcții, drept și respectiv de la conservator. După cum se vede, Stoilow se simțea răspunzător pentru întreaga știință și pentru întregul învățămînt universitar românesc. Dacă privim acum retrospectiv, reconsiderînd, în lumina activității lor ulterioare, pe oamenii pe care Stoilow i-a susținut, i-a recomandat, i-a apărut, se poate spune că în marea majoritate a cazurilor încrederea pe care el le-a acordat-o nu a fost înșelată. Așa se și explică faptul că cei pe care Stoilow i-a

selecționat drept colaboratorii săi direcți au devenit, aproape toți, la rîndul lor matematicieni de seamă, personalități științifice bine conturate. În același timp însă, Stoilow a fost ferm cu cei despre care s-a convins că sînt incapabili sau / și rău intenționați. În arhiva Stoilow se află copii ale unor memorii adresate de Stoilow forurilor superioare, cărora li se semnalează unele cazuri de persoane care abuzează de funcția pe care o dețin pentru a comite tot felul de acte de sabotaj (intenționat sau nu) la adresa culturii românești. Din păcate, astfel de elemente nu au lipsit nici din Academie, nici din Universitate, iar ceea ce a rămas fixat în literatura română ca literatură a „obsedantului deceniu” își găsește o confirmare și, într-o anumită măsură, o sursă în unele evenimente despre care depune mărturie arhiva Stoilow.

Un alt aspect semnificativ al activității lui Stoilow se referă la corespondența sa. Vom aduce aici în discuție și o parte din scrisorile de familie — numeroase, datorită faptului că avea frați și surori, fiecare cu familia sa. Este păcat că au rămas puține documente și puține mărturii despre copilăria și adolescența lui Stoilow, dar despre tatăl său, care a făcut o glorioasă carieră militară, vom putea menționa unele date interesante.

Tatăl lui Stoilow a făcut o carieră militară importantă și a avut o viață interesantă. Iată câteva documente care atestă acest fapt.

În 1868, ofițerul Stoilow avea gradul de căpitan. Ministrul Brătianu îi expediază o telegramă la Tg. Ocna, cu următorul conținut: „Veniți îndată în București fiind trebuincios”. O scrisoare din arhiva Stoilow este datată 4 iunie 1873, fiind expediată de la Craiova viitorilor părinți ai lui Stoilow, de către o persoană care semnează Logadi și care reproșează soților Stoilow faptul că ei sînt prea rar părinților lor. În contrast cu aceasta, o scrisoare trimisă de același Stoilow, către mama sa, la 1 ianuarie 1856, este plină de căldură și de recunoștință. De aceeași factură sînt câteva scrisori pe care viitorul tată al matematicianului le trimite mamei sale în 1855, scrisori de o caligrafie impecabilă, pe foi liniate cu creionul. 18 ani mai tîrziu, la 26 aprilie 1873, acesta primește, de la fratele său Alfred, o scrisoare semnificativă pentru atmosfera din familia lor: „Dragă Simion, ți-am promis să-ți trimit o scrisoare mai lungă, dar văd că tu ai o viață liniștită și nu

vreau să ți-o întunec cu grijile mele personale. Nu vreau să-ți întunec fericirea cu văicărelile mele prostesti. Recitind scrisorile tale, am impresia că visez. Nu mi-am imaginat vreodată, de-a lungul lungilor seri pe care le-am petrecut împreună, că unul din frumoasele noastre visuri ar putea prinde realitate: Tu iubești și ești iubit, în câteva zile vei avea o tovarășă de viață cu care vei împărți fericirea. Te așteaptă o viață liniștită, fără nori. Îți amintești tu casa noastră albă cu acoperiș verde, pe o colină scăldată de apele unui râu? Tu ai căsuța ta în mijlocul naturii, tu ai o floare, cea mai frumoasă care poate exista, tu ai atins idealul atât de mult căutat, tu ai tot ce ai fi putut să-ți visezi. De multă vreme nu am mai fost atât de fericit ca astăzi; fericirea ta îmi redă și mie iluziile și speranțele. Poate că asta va dura numai până mâine dimineață, dar chiar și o zi de fericire este mult, o zi pe care îmi imaginez că am petrecut-o cu tine, într-atât m-am lăsat prins în amintirea discuțiilor noastre triste și vesele în același timp. Viitorul tău e atât de frumos, încât îl face și pe al meu mai puțin sumbru ca de obicei, uit că sînt un idiot care, prin propria sa greșală, s-a ruinat fizic și moral și mă încălzește la razele fericirii tale. Dar iată că iar încep să vorbesc prea mult despre mine, contrar promisiunii pe care o făcusem. Am comandat cărțile tale de vizită, 100 pentru ea și 100 pentru tine. Am respectat modelul pe care mi l-ai trimis..." Atît această scrisoare cît și o parte din cele reproduse în continuare sînt redactate în limba franceză; sperăm că traducerea noastră nu trădează prea mult originalul. În familia Stoilow a existat o puternică tradiție de respect pentru cultura franceză. În casa Stoilow s-a vorbit mult în limba franceză, iar acest cult pentru o țară cu care noi am avut legături dintre cele mai puternice s-a transmis și viitorului mare matematician, care a militat toată viața pentru stringerea legăturilor cultural-științifice cu Franța. În 1880, ofițerul Stoilow era locotenent-colonel și comandant al regimentului 19 dorobanți. Printr-o scrisoare din partea generalului M. Cristodor Cerbu, comandantul diviziei I-a, i se atrage atenția că este de cel mai mare interes pentru țară ca supravegherea frontierei să fie îmbunătățită; să nu se permită, pe graniță sau în interior, lucrări de drumuri în afara celor efectuate de ingineri sau hotarnici autorizați. „Insist asupra ordinului ce am dat ca orice eveniment, orice mișcare, orice lucrare neobișnuită

în apropierea graniței să fie adusă imediat la cunoștința diviziei și ministerului. Vă recomand discreție asupra acestor dispoziții, pentru a nu se produce neliniște în rîndul populației și pentru a nu-i ajuta pe răuvoitori să se ferească mai bine. Acest ordin poate fi dat sub formă de instrucțiuni emenate de la dv. Puteți detașa în acest scop pe ofițerii dv. cei mai deștepti. Comunicați și d-lui prefect al districtului alăturată notă confidențială și dați-i tot concursul pentru urmărirea și arestarea vreunui eventual spion". În 1881, ofițerul Stoilow este avansat colonel. Începînd din acest an, numeroase documente se referă la atitudinea militarilor față de viața politică a țării. Printr-o circulară datată 21 ianuarie 1881, primăria „urbei" Caracal comunică lui Stoilow că „a fost înscris în listele electorale ale colegiului I pentru Adunare și Senat". Zece ani mai tîrziu, în decembrie 1891, colonelul Stoilow, în calitate de comandant al garnizoanei Craiova, este solicitat să rezolve un conflict privind acuzația adusă unui ofițer că ar fi încălcat regulamentul care interzice militarilor să facă politică. Relatăm această întîmplare, pentru savoarea și pitorrescul ei. În numărul din 17 decembrie 1891, al ziarului „Globul", căpitanul Cristescu este denunțat pentru a fi purtat discuții politice la cafenea. Printr-o scrisoare din 20 decembrie 1891, colonelul Stoilow se adresează căpitanului V. Rotta: „În seara zilei de 9 decembrie ați fost în cafeul Pomul Verde; răspundeți imediat și în scris dacă: 1) ați văzut pe căpitanul Cristescu luînd parte la o masă cu dl. C. Gîrleşteanu și dacă au băut șampanie; 2) dacă erați acolo cînd a venit căpitanul și cu cine; 3) în fine, tot ce știți că s-a petrecut". Răspunsul căpitanului Rotta: „... am onoare a raporta următoarele: 1) Am fost în una din seri la cafeul Pomul Verde, dar nu pot să știu pozitiv dacă era în seara de 9 decembrie; 2) În acea seară am văzut pe căpitanul Cristescu în salonul aceluia cafeu, stînd la o masă cu vreo doi amici pe care nu știu cum se numesc, deoarece eu sînt de curînd în Craiova și nici nu le-am făcut vreo dată cunoștință acelor cetățeni. Masa la care stam eu, fiind departe și vis-a-vis de cea la care sta căpitanul Cristescu, n-am putut observa felul băuturii ce lua numitul căpitan; 3) Ne-fiind atent la cei ce veneau în acel cafeu, nu pot preciza dacă căpitanul Cristescu a venit acolo în urma sau înaintea mea, deoarece în acea seară se aflau mai mulți ofițeri în acel salon, dintre care poate abia aș putea numi vreo doi pe care i-am re-

marcat mai bine; 4) Ceva extraordinar nu știu de a se fi petrecut în acea seară, în scurtul timp ce eu am stat acolo". Neputînd afla mare lucru de la căpitanul Rotta, colonelul Stoilow se adresează căpitanului Const. Topliceanu: „Căpitane! În seara zilei de 5 decembrie ați fost în cafeul Pomul Verde. Răspundeți imediat și în scris chiar pe aceasta dacă...", la care căpitanul Topliceanu răspunde: „... am onorul a răspunde că 1) subsemnatul mă găseam la o masă cu dl. locotenent Brăiloiu din regimentul 1 călărași, luam un ceai, cînd văd pe dl. Costică Gîrleșteanu intrînd în cafenea împreună cu alți doi civili și o femeie. Atunci Gîrleșteanu strigă în gura mare „A căzut conservatorii” și se pune la o masă comandînd șampanie. Peste vreo 10 sau 15 minute am văzut și pe dl. căpitan Cristescu că intră în cafenea, dar nu știu dacă era însoțit de cineva, și merge să dea bună seara la masa unde se afla dl. Gîrleșteanu. Acesta repetă și d-lui aceleași cuvinte ce le spusese cînd intrase în cafenea. Dl. căpitan Cristescu i-a răspuns atunci „Eu mă duc, dacă ai început astfel!” și în adevăr a și întors spatele, a venit la masa noastră, zicîndu-ne bună seara, și apoi a ieșit din cafenea. 2) Eu mă aflu în cafenea cînd domnia sa a intrat, fiind orele 11 $\frac{1}{2}$ după ieșirea de la teatru, unde avusese loc o conferință literară. Dar în urma ieșirii d-lui căpitan Cristescu din cafenea, subsemnatul și lt. Brăiloiu am părăsit de asemenea localul împreună, după ce am zis bună seara d-lui Costică Gîrleșteanu și altor domni ce mai erau acolo, între care îmi aduc aminte de d-nii Alexianu și Marinescu, avocați din acest oraș. 3) Nu mai știu ce s-a mai urmat în urmă după ce am ieșit din local și nici cine a mai venit. Acestea sînt relațiile ce știu asupra serii în chestiune". În urma acestei relatări, colonelul Stoilow se adresează avocatului S. Marinescu, de la care primește următorul răspuns: „Căpitanul Cristescu C., îndată ce a văzut pe unul din amici că începe să facă politică, imediat s-a sculat și a plecat. Mi-aduc aminte că a zis aceste cuvinte: „Fîindcă vă apucați de politică, eu sînt militar și nu mă amestec, de aceea vă las”. Prin urmare, vedeți d-le colonel că informatorul ziarului „Globul” s-a înșelat; o fi crezut poate că dl. căpitan Cristescu a stat pînă la sfîrșit, de aceea a dat acea informație greșită”. Un alt martor, Broșteanu, se adresează și el colonelului Stoilow: „Dl. Gîrleșteanu a ridicat un toast pentru căderea guvernului conservator și venirea liberalilor la putere, în urmă de care

dl. căpitan Cristescu, luîndu-și mantaua, a plecat, lăsînd la masă pe dl. Gîrleșteanu cu diferiți domni ce surveniseră". Întregul episod, care pare desprins direct din universul caragialesc, este revelator pentru mentalitatea și moravurile care au marcat sfîrșitul secolului trecut și, implicit, mediul în care și-a petrecut copilăria și adolescența viitorul mare matematician.

Deși ne-am propus să nu comitem indiscreția de a pătrunde prea adînc în corespondența familiei Stoilow, vom menționa totuși cîteva aspecte revelatorii pentru căldura sufletească ce a caracterizat raporturile dintre membrii ei. Vom menționa mai întîi o scrisoare din 30 ianuarie 1891 trimisă, din Craiova, către colonelul Stoilow, care se afla la sud de Dunăre, de către soția sa Olga. Această scrisoare exprimă nu numai o profundă afecțiune între cei doi soți, dar și grija deosebită pentru sănătatea părinților lor. O scrisoare din 3 februarie 1899, scrisă de o mină de școlar, care semnează pe Paulinette, Costică, Alexandru, Grigore și Simion, adresează tatălui lor, cu prilejul zilei sale de naștere, o urare impresionantă: „Copiii tăi te iubesc și te îndrăgesc cu tandrețe... te îmbrățișăm și sperăm că vei fi totdeauna sănătos, ferit de orice nenorocire; copiii tăi vor fi atenți, sirguincioși și totdeauna, totdeauna ascultători față de bunii și adorații lor părinți!” Alte cîteva scrisori sînt expediate de către copilul Stoilow (în vîrstă de 13 ani) și de către fratele său Goe (probabil Grigore) și sora sa Olga în cursul verii anului 1900, către părinții lor. O scrisoare trimisă de Goe la 31 iunie 1900, de la Prejba: „Aici la țară îmi place mult; aproape toată ziua stau cu Bălăceanu discutînd diferite lucruri, dar mai ales politică. Bălăceanu e un înfocat apărător al partidului liberal; prin exemple și argumente puternice caută să mă convertească de a trece de partea lor. Sînt foarte mulțumit de modul în care ne îngrijește iubita noastră soră Paulinette. Cred că tata s-a vindecat de nesuferita sa nevralgie. Toate diminețile lucrez la matematică, timp de 2 ceasuri, și cred că dacă voi urma tot așa timp de o lună voi ieși cu geometria bine învățată. Cît despre algebră, fiind materie mai puțină și mai ușoară o vom repeta-o cînd ne vom duce la liceu. Recunosc că n-am învățat în cursul anului la matematică și că meritam să fiu corigent, dar nu recunosc de fel ca doi dintre colegii mei mai slabi ca mine să treacă în iunie fără corigență iar eu nu”. La acest text al fratelui său, viito-

rul matematician adaugă: „Eu vă scriu mine”. Iată rîndurile sale, din care străbat cîndoarea și fericirea copilăriei: „Dragi părinți, noi sîntem sănătoși și petrecem bine. Ieri am fost la plimbare cu trăsura. Goe și chiar noi am învățată de la Bălăceanu să facem politică. Vă rugăm să ne mai scrieți”. La 8 iulie 1900, viitorul matematician trimite o scrisoare personală mamei sale: „Ieri am primit cartea poștală a lui Mimi și ne-am mirat că nu te duci și tu la Călimănești. Din ce cauză, dragă mamă, numai tata cu Mimi au plecat? Trebuie să-ți fie foarte urît așa de singură și aș dori să fim acum la tine. Noi petrecem și mîncăm foarte bine. Mai toate zilele avem salată cu cartofi și alte lucruri bune. Dianu mi-a dăruit un cal foarte frumos, tînăr și mic. Îmi dai voie, dragă mamă, să-l primesc? Dianu se duce în toate zilele la mașină, căci de luni a început să treiere grîu iar noi ne ducem adesea cu el. La mașină ne place foarte bine. Ți-a scris Olghița că aici este un om cam nebun, care ne face mult să ridem? Ieri Dianu a chemat niște lăutari și acel om nebun, după ce i-am spus eu să joace, că-i voi da 10 bani, a început să joace. Noi ne-am prăpădit de rîs. Ce mai face Milord? Aici sînt o mulțime de ciini cu care am făcutură cunoștință bună. Curtea aici este foarte interesantă, căci în ea se află: cai, capre, ciini, porci etc. Cu aceste cuvinte sfîrșesc. Mine îți scrie Olghița. Te sărută de 10 000 de ori al tău fiu care te iubește, Miciu (*n.n.* apelativul familiar al copilului Stoilow)”. Aceeași atmosferă tihnită de vacanță, de descoperire uimită a naturii, străbate din scrisoarea pe care Miciu și sora sa Olga o trimit părinților lor, de la Prejba, la 11 iulie 1900 (scrisoarea este scrisă de Miciu): „Duminecă am fost cu toții la pădure. Ce frumos a fost acolo! Ne-am așezat la umbra unui arbore mare și stufos, unde am întins o mușama mare, pe care ne-am așezat și am mîncat pui, ouă tari, brînză. La ora 11^{1/2} am plecată ră acasă. La trecerea peste Olt am petrecut foarte bine. Un pod umblător ne-a dus pe noi și cele două trăsuri cu care venisem, de la un mal la altul. Parcă erai pe vapor, așa de frumos era. De două ori a trebuit să ne dăm jos din trăsura, pentru a trece pe o punte mică, peste care nu era posibil să treacă trăsurile, care au trecut direct prin apă. Podul este departe și la el ajungi numai cu trăsura, preț de 1^{1/2} de ceas. Ne pare foarte rău că nu mai este aproape de casă, cum era înainte, pentru a ne putea duce zilnic în pădure, unde este mult mai frumos decît în pădurea de la Spineni. Este păcat că

tu, dragă tată, cînd ai fost aici, n-ai avut ocazia de a trece podul în pădure. Desigur că ți-ar fi plăcut foarte bine acolo. Cum a venit de ați plecat la Călimănești în loc să vă duceți la București? Eu doresc mult de a primi cîteva rînduri din partea voastră, pentru a ști cel puțin cum vă merge. Ce mai faceți voi și Mimi? Costică n-ați auzit cînd vine?” La 18 iulie 1900, tot de la Prejba, o scrisoare semnată numai de Miciu: „Dragii mei părinți, de trei zile nu v-am mai scris, dar duminică a fost Costică aici și cred că v-a spus cum ne merge, iar luni nu vine poștarul. Fusesse de cîteva zile foarte cald. Azi, după mult timp, a plouat de dimineața și este ceva mai răcoare. Dormim mai mult dimineața, căci după prînz este prea cald pentru dormit. Te rog spune lui Mimi să-mi răspundă la scrisoarea mea printr-una lungă. De mult n-am mai primit o scrisoare de la el. De mult am vrut să scriem lui Linetta, dar era așa de cald încît ne era lene să scriem. După masă eu aduc mai întotdeauna afară în grădină patul de lagăr pe care doarme Goe și mă culc nițel. Poimîine ne-a promis Paulinetta că ne vom duce iarăși în pădure, fiindcă acolo ne-a plăcut așa bine. Vă rog să ne mai scrieți cum vă merge, căci scrisorile voastre ne fac o mare plăcere. Vă sărută al vostru fiu, Miciu (Olghița vă trimite multe sărutări)”.

Din toate cele de mai sus, se desprinde imaginea unui copil obișnuit, normal, care nu manifesta nici o preocupare specială, nici o precocitate, dar care avea o curiozitate spontană în legătură cu tot ceea ce vedea și auzea. Această impresie de „copil obișnuit”, care nu-și devansa în nici un fel vîrsta sa reală, este confirmată și de buletinul matricular al elevului Stoilow Simion din clasa a doua a liceului Carol I din Craiova (anul școlar 1900—1901). Acest buletin, eliberat pe ziua de 19 iunie 1901, consemnează următoarea situație școlară (respectăm ordinea din buletin): desen 7, muzică 7, gimnastică 6, religie 8,50, română 6,38, franceză 6,75, germană 9,75, istorie 8,25, matematică 8, științe naturale 8,13, geografie 6,50, latină 6,75. Acestea au fost mediile anuale. La examenul final a obținut următoarele note: religia 10, română 8, franceză 8, germană 9, istorie 8, matematică 9, științe naturale 8, geografie 9, latină 9. Să mai adăugăm nota 10 la purtare și 9 la frecvență. Promovat cu media generală 8,30. Dacă ar fi totuși să identificăm o anumită înclinație, ar trebui să vorbim despre talentul său la desen (în ciuda notei

mici). În arhiva Stoilow am găsit câteva desene în culori executate la o vîrstă fragedă. Cu deosebire atrage atenția un desen datat 16 mai 1895, care-l prezintă pe tatăl său. Regretăm că nu-l putem reproduce aici.

Urmărind mai departe corespondența Stoilow, vom face un salt de câteva decenii, pentru a ne opri la o scrisoare pe care Stoilow o primește de la sora sa la 12 mai 1931. Întreaga scrisoare constituie o evocare a mamei lor, care tocmai decedase atunci. Este unul dintre puținele documente din care se desprinde o imagine mai detaliată, mai amplă a acestei femei și a sentimentelor pe care familia ei le manifesta față de ea. Ca și multe dintre scrisorile anterioare, și aceasta este redactată în limba franceză. Faptul acesta nu trebuie însă să fie interpretat greșit. Stoilow a manifestat totdeauna un deosebit interes pentru cultura românească, pe care o cunoștea foarte bine și cu ai cărei reprezentanți se afla în cele mai bune relații. Dar, venind dintr-o familie înstărită (ne referim la perioada secolului trecut; după 1900 și după decesul generalului Stoilow, situația materială a mamei lui Stoilow s-a deteriorat treptat, ajungînd în deceniul al treilea al secolului nostru destul de critică), în care, după obiceiul timpului, copiii erau crescuți cu ajutorul guvernantelor, în limbi internaționale ca franceza și germana. Stoilow s-a familiarizat repede cu o cultură pe care ulterior avea să-o redescopere pe o altă filieră, aceea de matematician. Să revenim însă la scrisoarea primită de la sora sa. Iată-o: „Dragul meu Miciu, am primit ieri scrisoarea ta, care exprimă atît de bine ceea ce tu simți și ceea ce noi toți simțim de cînd mama noastră ne-a părăsit. Fără îndoială, există puține persoane care, la vîrsta ei, lasă în urmă nu numai regrete, dar și o mare derută, un mare gol. Cu delicatețea ei incomparabilă, cu calmul și seninătatea ei care ne dădeau parcă tuturor mai multă siguranță și securitate, părea că nimic rău nu se poate întîmpla în prezența ei. Știu că-ți reproșezi faptul că timp de 11 luni nu ai văzut-o. Cine ar fi putut prevedea aceasta? Ea a refuzat (cu o dulce dar fermă decizie) să vină să petreacă cu noi sărbătorile și o parte din iarnă. În februarie a avut o gripă. În decembrie am găsit-o slăbită și palidă. A avut o iarnă frîmintată, datorită dificultăților materiale. Apoi s-a mai liniștit, cum s-a putut vedea, printre rînduri, în scrisorile ei. Mi-a făcut o vagă promisiune de a veni la București, dar de

fapt ea refuza să-și mai facă vreun proiect; avea oare o premoniție? În ciuda încurcăturilor de ordin financiar în care intrase, ea vorbea mai mult de tine, de conferințele tale, de scrisorile tale, ca de o oază reconfortantă. Tu ai cel puțin această imensă consolare de a-i fi trimis ultimele raze de soare. Din păcate, ultima ta scrisoare a ajuns la ea a doua zi după ce murise. Noi am citit-o și ne-am gîndit îndelung la imensa plăcere pe care această scrisoare i-ar fi procurat-o. Iată cum s-au întîmplat lucrurile exact. Duminică 26 aprilie s-a dus ca de obicei la biserică, apoi s-a dus să ia masa la Paulinette. Părea foarte bine dispusă. Seara pe la 7 și 1/2, voia să plece acasă, dar deodată a simțit o amețală. A venit medicul, dar la scurt timp după aceasta ea a decedat. Și iată, acum, am rămas noi, copiii ei, legați prin amintirile noastre comune. Noi doi am cunoscut-o cel mai bine pe mama, am trăit atît de mult în intimitatea ei. Eram atît de tineri cînd tata a murit și de cînd mama a preluat asupra ei și afecțiunea noastră paternă. Mă doare că nu pot fi acum alături de tine, pentru a o evoca împreună. Ea n-a spus, în preajma morții, nimic ce ar fi putut arăta că-și dă seama de gravitatea situației în care se afla. Nici măcar atunci nu voia să deranjeze pe cei din jur, nu voia să iasă din discreția pe care atît de bine i-o știi. Am văzut-o moartă. Figura ei exprima un calm desăvîrșit, avea aerul să spună „misiunea mea aici e încheiată, mă întorc la ai mei”. Avea chiar un vag suris. Să învățăm de la ea echilibrul, capacitatea de a te stăpîni. Ea nu iubea manifestările zgomotoase. Din vidul în care ne-a lăsat, noi, copiii ei, nu vom putea ieși decît cu imaginea ei mereu vie, unindu-ne și iubindu-ne, cum ea ne-a învățat”. Toți cei care l-au cunoscut pe Stoilow vor fi avut o strîngere de inimă la citirea acestei scrisori. Ea exprimă atît de bine calitatea umană a celui care avea să devină un mare om de cultură și un mare cetățean patriot, într-o perioadă dintre cele mai tulburi ale istoriei românești. Filtrate printr-o cultură superioară și o răspundere socială superioară, trăsăturile psihice și morale ale mamei sale au devenit la Stoilow concretizarea unei probități și rectitudini care-l situează printre cele mai de seamă conștiințe morale ale întregii noastre istorii de după primul război mondial.

O altă perioadă care se reflectă în mod semnificativ în corespondența lui Stoilow este aceea în care a funcționat ca

ambasador al țării noastre la Paris, în anii 1946—1948. Tre-cuseră atunci zece ani de când Stoilow se făcuse cunoscut în întreaga lume matematică și, în mod special, în Franța, prin monografia sa publicată în colecția Borel, monografie prin care pune bazele unei noi ramuri a analizei matematice, teoria topologică a funcțiilor. Prestigiul științific al lui Stoilow se reflecta, în mod inevitabil, asupra întregii sale activități, credibilitatea omului politic Stoilow era, în acel moment de insuficientă claritate a noilor evoluții pe plan mondial, considerabil favorizată de cartea sa de vizită ca savant. Marele matematician francez Arnaud Denjoy îi adresează, la 20 februarie 1947, o scrisoare din partea Universității din Paris: „Dragă prietene, la propunerea mea — la care s-a asociat și decanul Facultății de științe — consiliul facultății a decis să vă invite să ne prezentați un ciclu de conferințe despre geometria lui Riemann. Veți primi în scurt timp o invitație oficială. Sintem mulți aci la facultate nerăbdători să vă ascultăm. La admirația noastră pentru lucrările dv. profunde și originale se adaugă simpatia pe care colegul și omul Stoilow a dobândit-o de mult printre noi. Va fi foarte bine, totodată, să inițiați un auditoriu parizian cît mai larg în cercetările dv. recente, într-un domeniu în care aveți întreaga autoritate. Soția mea și cu mine am fost profund mîhnîți de pierderea pe care România și Franța au încercat-o prin dispariția Elenei Văcărescu. Vă exprimăm sincerele noastre condoleanțe”. În același timp, Stoilow, menține legături strînse cu cei din țară. Iată o scrisoare trimisă lui Stoilow din București, la 10 septembrie 1946, de către marele scriitor Gala Galaction: „Excelență și mult stimat Domnule Colega, vă rog călduros să nu-mi luați în nume de rău întîrzierea cu care vă răspund. Scrisoarea Domnicii Voastre — atît de importantă și de mîngietoare pentru mine — trebuia să mă oblige la multă reflexiune și cîntăreală. Răspunsul meu este, spre părerea mea de rău, negativ. Sînt un om singuratic, spectator în lume și incapabil de adaptări și de încadrări ierarhice. Nu pot să primesc postul de superior al Capelei române din Paris — oricît de amabil și de atrăgător este felul cum îmi este oferit — fiindcă nu vreau și nu pot să primesc o robie eclesiastică pe care n-am cunoscut-o niciodată. Dealtfel, problema este azi dezlegată. Șeful Bisericii Române — la zeci de mii de kilometri depărtare de

convîngerile și de preocupările Domnicii Voastre — a ales și a recomandat pe viitorul superior al capelei din Paris. Excelență și mult stimat Domnule Colega, trist și nemulțumit de mine însumi, pentru multele mele neajunsuri, vă rog să credeți că scrisoarea D-Voastră îmi rămîne memorabilă și că vă păstrez în inima mea un loc de înflorită recunoștință”. O atare scrisoare, aflată în arhiva Stoilow în manuscris original, constituie un document de istorie literară, dar, în același timp, descoperă un aspect interesant al personalității lui Stoilow, deosebit de atent la folosirea adecvată a marilor noastre personalități culturale; iar afinitatea lui Stoilow față de Galaction, afinitate care, după cum rezultă din scrisoarea de mai sus, era reciprocă, este firească, dacă ținem seama de spiritul profund democratic al acestor doi mari oameni de cultură români, care totdeauna s-au situat la stînga și s-au împotrivit tuturor mișcărilor fasciste.

Iată acum alte două scrisori, primite din partea matematicienilor. Din Turcia, unde se afla ca ambasador al României, îi scrie Gr. C. Moisil (la 16 februarie 1947): „Mult stimat domnule profesor, am primit scrisoarea D-Voastră și Vă mulțumesc, Viorica și cu mine, pentru gîndurile bune ce le aveți. Noi după o iarnă petrecută la Ankara și Istanbul ne pregătim să mergem pentru vreo două săptămîni la București. Vom fi acolo toată prima jumătate a lui martie... Nu am primit nici o veste de la Neculcea (n.n. profesorul Neculcea era pe atunci atașat cultural al țării noastre la Paris). Cum mai stă el cu lucrul? Ce pot spune la București celor de la Facultatea de științe, dacă mă întrebă? Am primit o scrisoare de la D. Myller. Ei sînt sănătoși și optimiști. Ați făcut cursurile de la Sorbona în anul acesta? Eu încerc să fac ca cei de aci și cei din București să-l invite pe Denjoy să țină niște conferințe la Istanbul—Ankara—București. Să vedem. Am făcut cîteva conferințe la Istanbul, două la Universitatea tehnică, de hidrodinamică și elasticitate și una la Universitate, despre algebra logicii. Viorica și cu mine vă trimitem expresia sentimentelor noastre de fidelă prietenie”. Și iată acum scrisoarea cu data de 17 august 1947, pe care o primește din partea lui Miron Nicolescu, în acel moment adjunct al ministrului învățămîntului: „Dragă Maestre. Pă-răsim Parisul cu profundul regret de a nu vă fi văzut, măcar pentru cîteva ore, cum am sperat, după telefonul dv. Ce

întâmplare nefericită, de a fi făcut câteva mii de kilometri, pentru ca abia să nu vă întâlnim! Soția mea și cu mine ținem să vă spunem, în momentul plecării noastre, cât de mult ne-au emoționat generozitatea și grija dv. pentru noi, grija care a mers pînă acolo încît ați vegheat de departe și cu disceție ca totul să se desfășoare bine. Și într-adevăr, totul s-a desfășurat foarte bine... Sint foarte satisfăcut de vizita mea aici, ca ministru. Ca simplu particular sint însă mai puțin mulțumit, deoarece am fost obligat să transform aproape toate diminețile mele în ore de birou și de audiențe care nu se mai terminau. L-am putut vedea pe dl. Montel, care ne-a invitat la dejun. S-a schimbat foarte puțin. Toți ceilalți matematicieni erau plecați în vacanță... Încă odată, vă mulțumim din toată inima pentru tot ce ați făcut pentru noi și sperăm să vă întâlnim și să ne luăm puțin revanșa în curînd, la București”.

Atît scrisoarea lui Moisl cît și aceea a lui Miron Nicolescu sint semnificative pentru ceea ce reprezenta Stoilow în matematica românească. Toți matematicienii români se simțeau obligați să-i raporteze ceea ce au realizat, să-i ceară sfaturi, nu pentru că i-ar fi fost subordonați administrativ, ci dintr-un imbold interior, determinat exclusiv de prestanța pe care Stoilow o dobîndise ca om și ca savant. Se simte în aceste scrisori ceea ce Moisl avea să constate mai tîrziu: Stoilow nu și-a închipuit niciodată că este conducătorul matematicii românești; și tocmai de aceea a fost.

Încheiem aici discutarea corespondenței lui Stoilow. Treceam la un alt aspect al activității sale, asupra căruia documentele existente sint deosebit de bogate și ar merita, cel puțin selectiv, să facă obiectul unui sau mai multor volume. Avem în vedere câteva zeci de caiete cuprinzînd notele personale ale lui Stoilow, fie în legătură cu activitatea sa matematică, științifică sau didactică, fie relativ la lecturile pe care le frecventa, de la cele științifice pînă la cele filosofice și literare. De asemenea, găsim în aceste caiete notele pregătitoare sau textele unor conferințe ținute la diferite universități. Majoritatea textelor sint în limba franceză.

Vom alege pentru prezentare în cele ce urmează 19 dintre aceste caiete, pe care le vom discuta în ordine cronologică. Din păcate, nu toate sint datate, dar după conținutul lor se poate aprecia perioada în care au fost redactate. Cel mai vechi

dintre aceste caiete provine din anul 1909, cînd se afla student la Paris, și conține în întregime note de astronomie. Caietul are peste 200 de pagini. Textul urmează probabil firul cursului de astronomie de poziție frecventat de Stoilow la Sorbona (din păcate, nu se specifică numele profesorului). După un preambul de trigonometrie sferică se trece la partea propriu-zisă de astronomie, specificîndu-se că obiectul principal al cursului este studiul mișcărilor cerești aparente, problema principală constînd în a determina în ce direcție se mișcă un anumit astru și ce direcție are la un moment dat, într-un loc dat. Întregul curs este de un înalt nivel matematic, redactarea prezintă o desăvîrșită acuratețe, ca și cum ar urma să fie trimisă la tipar. Se poate presupune că Stoilow prelucra acasă notele de curs, dîndu-le o formă finită. Stoilow gîdea scriind și este interesant faptul că simțea nevoia să aducă șirul ideilor la acea formă impecabilă sub care el însuși le-ar fi putut profesa de la catedră. Lucrul este cu atît mai remarcabil, cu cît se referea la o materie pentru care nu există vreo mărturie că Stoilow ar fi manifestat vreun interes special. Astronomia a fost, pentru multe generații de studenți matematicieni, o disciplină marginală, cum erau pe vremuri în liceu desenul și caligrafia. Mulți studenți matematicieni valoroși își făceau un titlu de mîndrie din disprețul lor pentru această disciplină. Unii repetau examenul de astronomie de cîte patru sau cinci ori pînă îl promovau. După cum se vede, nu acesta a fost cazul lui Stoilow.

Următorul caiet (pe care-l vom nota convențional II) conține note de teoria funcțiilor reale: continuul real, numere cardinale, funcții măsurabile, teoria descriptivă a funcțiilor; după Baire. Toate aceste considerații sint întrerupte, în mod bizar, de cîteva pagini privind integrala completă a lui Lagrange și integrala generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de primul ordin și unele criterii de convergență la serii.

Caietul III datează din perioada anilor 1914—1919 și conține note de lectură pe teme variate. Începe cu o dare de seamă asupra conferinței lui H. Minkowski „L'Espace et le temps” publicată în volumul *Das Relativitätsprinzip* (traducere franceză în „Annales de l'École Normale Supérieure”, 1909). Următoarele note se referă la singularitățile integralelor ecuațiilor liniare cu derivate parțiale. De un deosebit interes sint notele intitulate „Știință franceză și știință ger-

mană" și care încep astfel: Pierre Duhem, profesor la Facultatea de științe din Bordeaux, unde predă fizica teoretică, a publicat recent cele patru conferințe ținute la cererea studenților. Volumul este intitulat *Știința germană*. După acest autor, matematicile sînt prin excelență o știință germană, deoarece ele reclamă spiritul geometric, caracteristic germanilor, în timp ce francezii excelează prin spiritul lor de finețe. Notele lui Stoilow ocupă vreo zece pagini și constituie o polemică la adresa lui Duhem. Urmează note privind traiectoria unui punct material lansat la suprafața Pămîntului cu o viteză inițială și supus numai gravitației și rezistenței aerului. Caietul se încheie cu cîteva pagini de note privind măsura boreliană a mulțimilor. Caietul IV este dedicat și el măsurii mulțimilor și, în mod special, mulțimilor nenumărabile de măsură nulă. Datează din anii 1918–1919 și se află, probabil, la baza articolelor lui Stoilow privind structura și clasificarea mulțimilor de măsură nulă. Caietul V, nedatat și intitulat „Eseuri. Note” este dedicat transformărilor interioare în plan și constituie o parte din laboratorul din care au emanat acele lucrări ale lui Stoilow care anunță pe viitorul cercetător al teoriei funcțiilor de variabilă complexă. Caietul VI conține conspecte bibliografice privind topologia și teoria funcțiilor reale, noțiuni privind varietățile topologice, triangulație, orientare, gradul lui Brouwer, suprafețe Riemann. Orientarea preocupărilor lui Stoilow spre variabila complexă devine din ce în ce mai fermă. Caietul VII este dedicat unor cercetări românești de teoria funcțiilor, cu indicația „Note pentru o lucrare cerută de Academia Română”. Este mai întîi conspectată teza de doctorat a lui Pompeiu, privind continuitatea funcțiilor de variabilă complexă, precum și alte lucrări de variabilă complexă ale aceluiași autor. Urmează note privind articolul lui Vera Myller-Lebedev asupra funcțiilor întregi admitînd o mulțime dată de drepte ale lui Julia (*Mathematica*, 1929) și articolul privind cazul extrem al inegalităților lui Cauchy (*Annales scient. de Jassy*, 1939). Urmează apoi memoriul lui David Emmanuel relativ la integralele abeliene de a treia specie (*Annales de l'École Normale Sup.*, 1879). Este apoi conspectată teza de doctorat a lui Al. Ghica, din 1929, privind funcțiile de pătrat sumabil de-a lungul contururilor domeniilor lor de holomorfie, precum și alte articole ale aceluiași autor. Urmează note privind

teza de doctorat a lui Alexandru Froda (Paris, 1929) relativă la distribuția proprietăților de vecinătate ale funcțiilor de variabile reale, precum și note relative la alte articole ale lui Froda. Un loc important îl ocupă conspectarea lucrărilor lui Florin Vasilescu asupra funcțiilor multiforme de variabile reale, teoriei potențialului, problemei lui Dirichlet etc. Ultima parte a caietului revine la funcțiile lui Pompeiu. De fiecare dată, Stoilow reține esențialul, relevă posibile direcții de continuare, notează punctele delicate, asupra cărora va trebui să revină, stabilește corelații cu alte rezultate. Caietul VIII conține note de curs privind transformările interioare, suprafețele Riemann, transformarea lui Iversen. Simple schițe, pe alocuri redactări detaliate. Caietul IX conține textul unor conferințe prezentate la Bruxelles în 1931, privind aspectele moderne ale noțiunii de funcție, după următorul plan: istoric (Euler, Fourier, Dirichlet), polinoame, funcții întregi, funcții analitice, funcții indefinit derivabile și funcții evasianalitice în sensul lui Denjoy-Carleman, funcții definite prin ecuații diferențiale, funcții continue generale, reprezentarea lor cu ajutorul funcțiilor cu variație mărginită (Nina Bary), teoremele lui Weierstrass, Denjoy, Besicovitch, Sierpiński, proprietăți metrice și proprietăți topologice, funcții absolut continue, funcții discontinue, clasificarea lui Baire, funcții arbitrare. Textul este impecabil, redactat cu deosebită eleganță, în stilul caracteristic al lui Stoilow. Caietul X conține numai vreo zece pagini și se referă la funcții analitice (note de curs sau conferințe). Caietul XI poartă pe copertă indicația „Teoria topologică a funcțiilor analitice 1. Curs la Sorbona”. Redactarea este impecabilă, „gata de tipar”. Caietul XII conține note dispartate, brute, privind „principiile calitative (topologice) ale teoriei funcțiilor I (Lecții predate în 1933–1934, semestrul de iarnă) și suplimente”. Caietul XIII datează din 1939 și este primul redactat în limba română. Conține „Lecțiuni asupra principiilor calitative ale teoriei funcțiilor”. Este interesant că pentru noțiunea de mulțime se folosește cuvîntul *ansamblu*. Redactarea este finisată, probabil nu departe de varianta tipărită ulterior. Caietul XIV are pe copertă următoarea indicație: „Matematică. Rezumate de memorii și note diverse. Terminat în 1940”. Conținutul corespunde întocmai acestei indicații. La sfîrșitul caietului este conspectată cartea lui A. Heyting privind

intuiționismul matematic, făcându-se corelația cu linia de cercetări Baire-Borel-Lebesgue și, bineînțeles, făcându-se referiri la Brouwer. Se atrage atenția asupra faptului că Poincaré poate fi considerat ca precursor al intuiționistilor. Este adus în discuție Hilbert. Nu există încă vreo referire la Gödel. Caietul XV cuprinde, în prima parte, note ale cursurilor predate de Stoilow la Școala politehnică din București, în perioada 1940 (serii, mulțimi, funcții monotone, serii duble), iar în partea a doua conspecte de lucrări diverse (Whyburn, Picard, Fekelē — diametrul transfiniit —, Nevanlinna, Ahlfors, Pontrjagin — grupuri topologice —, Deane Montgomery, Élie Cartan, Iwasawa, Maltzev, Chevalley — toți aceștia din urmă cu lucrări de teoria grupurilor topologice și a grupurilor Lie). Urmează apoi note din F. Klein (Programul de la Erlangen 1872, reprodus în Math. Annalen, 1893), o bibliografie privind suprafețele Riemann deschise, observații asupra definiției varietăților topologice (explicarea faptului că în această definiție trebuie lucrat cu un spațiu Hausdorff — așa-numitul spațiu T_2 al lui Alexandrov și Hopf — și nu doar cu un spațiu Fréchet (sau spațiu T_1)), conspecte din M. Parreau, A. Mori, Leo Sario, O. Teichmüller (reprezentări conforme și evasiconforme).

Însă, în afara chestiunilor menționate, Caietul XV mai conține unele chestiuni, a căror semnificație depășește sfera specialității lui Stoilow, căpătînd, mai cu seamă acum, o importanță mai generală, din punctul de vedere al filozofiei științei și al istoriei matematicii românești. Să le luăm în ordine. Zece pagini sînt consacrate, la mijlocul caietului, unor comentarii privind lecția de deschidere a lui Barbilian (lecție ținută la 8 februarie 1942) dedicată problemelor generale ale axiomaticii. Se știe că Barbilian distinge între două specii de discipline, după cum ele au sau nu la bază lor un grup (geometriile Programului de la Erlangen în sens larg). Această distincție îl conduce pe Stoilow să considere două moduri diferite de a studia structura unei doctrine (discipline) matematice: (A) Între elementele unei mulțimi abstracte sînt date relații a priori (care revin la un anumit mod de definire) numite *axiome*. Pentru ca acest sistem să constituie o disciplină (doctrină) matematică este necesar să se definească (în interiorul sistemului) o noțiune de *echivalență între conceptele puse în joc* (identitate, d.p.d.v. al disciplinei, sau „congru-

ență”), iar această definiție implică pe aceea de *grup de transformări* (în sensul cel mai general), operînd în domeniul acestor concepte. Conținutul disciplinei este atunci format de mulțimea de proprietăți comune conceptelor echivalente, adică de proprietățile invariante ale grupului (de exemplu, topologia abstractă). (B) O „geometrie” în sensul Programului de la Erlangen, avînd la bază un grup dat într-o anumită reprezentare, pune problema caracterizării printr-un sistem de axiome ca cel de la (A) — a *grupului abstract corespunzător*, adică a clasei de grupuri izomorfe cu grupul dat (este vorba aici de problema pe care Hilbert a rezolvat-o pentru geometria euclidiană).

Acest din urmă punct de vedere a condus la două probleme: 1) aceea a *necontradicției* sistemului de axiome, sau a consistenței, pentru a folosi termenul lui Barbilian și 2) aceea de a ști dacă sistemul este *complet*, cu alte cuvinte dacă sistemul determină de o manieră univocă grupul abstract dat (ceea ce Barbilian numește problema „categoricității”). Punctul de vedere (A) nu conduce decît la problema (1), problema (2) fiind oarecum rezolvată „prin definiție”. În punctul de vedere (A) intervine totdeauna un *grup de transformări* (de corespondențe, de relații cu sens determinat), în timp ce în (B) este vorba de a se caracteriza un *grup abstract*, dar acest grup abstract *admite o reprezentare sub forma unui grup de transformări*.

Stoilow arată apoi în ce fel orice „teorie” matematică are la bază sa, mai mult sau mai puțin pus în evidență, un grup. O teorie este o mulțime de fapte care se asociază unor principii (adică fapte generale) și definiții. O teorie începe prin introducerea anumitor concepte construite pe baza altora (presupuse cunoscute), *cu ajutorul definițiilor*, sau detașate direct din mulțimea de idei sau concepte fundamentale ale gândirii raționale, *cu ajutorul axiomelor* (care sînt de fapt un fel de definiții deghizate). Dar de îndată ce aceste concepte au fost introduse, este obligatoriu să se definească *echivalența*, adică să se precizeze cînd anume, *din punctul de vedere al teoriei care urmează să fie dezvoltată*, va trebui să considerăm drept *identice* două oarecare dintre aceste ființe nou introduse. Numai atunci teoria este perfect definită și delimitată; ea revine la *mulțimea proprietăților comune ființelor echivalente*. Ființele care constituie materialul teoriei sînt repartizate în

clase de ființe echivalente între ele. Două ființe din aceeași clasă vor fi considerate indiscernabile în teoria respectivă. Trecerea de la o ființă la alta, din aceeași clasă, este o „transformare”. Mulțimea acestor transformări constituie un grup; este grupul de bază G al teoriei T .

Se întâmplă frecvent, într-o teorie, că se pot formula *proprietăți comune unei infinități de clase*, deci se pot considera *clase de clase*. În acest caz, vom avea *proprietăți invariante în raport cu un grup care este un supragrup G_1 al lui G* . Dacă aceste proprietăți sînt suficient de numeroase și interesante, ele formează o nouă teorie T_1 , al cărei grup de bază va fi G_1 . Tot ceea ce este adevărat în T_1 este adevărat și în T , dar există în T propoziții care nu sînt și propoziții ale teoriei T_1 . Dacă, de exemplu, T este geometria euclidiană a planului iar T_1 este geometria afină a planului, se obține exact situația menționată. Trebuie, desigur, să mai distingem în ceea ce privește proprietățile teoriei T_1 , pe cele care pot fi formulate în termeni care sînt *invarianți în raport cu G_1* , de cele care exprimă numai o relație adevărată pentru toate ființele dintr-o clasă din G_1 , dar care *face să intervină concepte invariante doar în raport cu G* (clase ale lui G). De exemplu, „suma unghiurilor unui triunghi (oarecare) este egală cu π ” este o proprietate care aparține tuturor triunghiurilor (deci unei clase a grupului afin), însă noțiunea de *unghi* este numai un invariant euclidian.

Să încercăm să aplicăm aceste considerații *analizei clasice*, considerate în ansamblul ei ca o teorie. Analiza este studiul *continuumului numeric* și al *funcțiilor* care i se asociază. Însă continuumul este definit prin introducerea numerelor iraționale, iar un număr irațional este (Cantor) un șir convergent (după Cauchy) de numere raționale. La aceasta se adaugă imediat: două astfel de șiruri r_n și r'_n definesc același număr irațional (cu alte cuvinte: sînt ființe echivalente din punctul de vedere al analizei) dacă $r_n - r'_n$ converge la zero. Tot așa, la definiția „o funcție este o lege de corespondență pe baza căreia un număr x ales arbitrar conduce la un număr y perfect determinat” se adaugă: două funcții sînt identice (deci ființe echivalente din punctul de vedere al teoriei care ne interesează) dacă două numere identice x conduc la numere identice y (identice în sensul definiției numerelor). Rezultă că grupul G de bază pentru analiză este grupul transformărilor

oricărui șir convergent de numere raționale într-un altul echivalent (în sensul precizat). Desigur, chiar în dezvoltarea analizei clasice sînt considerate în mod sistematic proprietăți care aparțin unor clase de funcții mai mult sau mai puțin generale, deci proprietăți invariante față de unele supra-grupuri ale lui G . Dar cel puțin primele proprietăți ale analizei se referă chiar la G . Astfel, proprietățile operațiilor elementare și ale trecerii la limită între numere reale se referă chiar la grupul G .

Putem deci defini *analiza clasică* drept studiul *numerelor reale indiferent de reprezentarea lor particulară sub formă de șiruri de numere raționale*. Dimpotrivă, *aritmetica* se interesează tocmai de una sau alta dintre aceste reprezentări: de exemplu periodicitatea (fie în reprezentarea zecimală, fie în aceea de fracție continuă) etc.

Orice disciplină fundată pe axiome (a priori: (A) sau după ce s-a dat grupul fundamental într-o reprezentare particulară: (B)) introduce: 1) concepte, 2) raporturi între concepte și 3) o definiție a echivalenței dintre astfel de concepte. Orice sistem de axiome susceptibil de a constitui o doctrină (în sensul lui Barbilian) trebuie deci să cuprindă cel puțin trei tipuri de axiome: 1) axiome de existență, 2) axiome de legătură și 3) axiome de congruență (care introduc grupul fundamental al doctrinei).

Aceste axiome sînt numite *sysygies* (vezi Barbilian). Se pune însă problema: Este posibil să spunem că sistemul de sysygies adoptat este *saturat*? Cu alte cuvinte: este posibil (și are aceasta un sens precis?) să ne asigurăm că orice altă propoziție formulată în termenii sistemului este adevărată sau falsă *în raport cu sistemul*? Barbilian pretinde că lucrul este demonstrat (?) pentru sistemul lui Hilbert al geometriei euclidiene. Stoilow crede că, pentru ca problema să capete un sens precis, trebuie adăugat că *propoziția în discuție* (luînd, mai întîi, forma unei noi axiome) *nu trebuie să afecteze (ne doit pas toucher), nici măcar să completeze axiomele de existență și cele de congruență*. Fără îndeplinirea acestei condiții ar fi totdeauna posibil ca, prin restrîngerea acestor axiome (introducînd existențe noi și reducînd grupul la unul din subgrupurile sale), să se arate că orice sistem este nesaturat. Așadar, orice propoziție adăugată trebuie să aibă forma unei *axiome de legătură*, deci să nu fie de tipurile 1 sau 3.

La aceste considerații, pe care Stoilow le așază sub titlul *Observații în legătură cu o conversație despre disciplinele matematice axiomatizate sau neaxiomatizate*, este adăugată următoarea notă: Este cert că problema prezintă un deosebit interes și o foarte mare importanță. Este vorba aici de problema generală de care Hilbert se ocupă în a sa *Beweistheorie* (teoria demonstrației): să se stabilească un sistem de axiome formale astfel încît orice propoziție să fie, în raport cu sistemul format de aceste axiome, sau adevărată sau falsă (deci sau consecință logică a axiomelor, sau în contradicție cu ele).

Am urmărit în detaliu firul gândirii lui Stoilow, deoarece este vorba aici nu numai de un dialog interesant între doi mari matematicieni români, ci și de o problemă de mare interes cultural, privind fundamentele matematicii și, implicit, ale întregii cunoașteri umane. Considerațiile lui Barbilian privind axiomatizarea sînt publicate (într-o versiune probabil ameliorată față de aceea la care se referă Stoilow în 1942) în volumul al treilea al operei sale didactice, tipărită postum la Editura tehnică, sub îngrijirea profesorului N. N. Mihăileanu. Ne-am referit la lecția de deschidere ținută de Barbilian în 1942 în cartea noastră *Din gîndirea matematică românească* (Editura științifică și enciclopedică, București, 1975, p. 123). Neștiind ce anume modificări a introdus Barbilian în textul său, fie ca urmare a observațiilor de mai sus ale lui Stoilow (dar putem fi siguri că aceste observații au fost într-adevăr comunicate lui Barbilian?), fie ca urmare a evoluției propriilor sale idei, nu ne rămîne decît să încercăm să formulăm unele ipoteze întemeiate pe confruntarea dintre textul publicat postum la Editura tehnică și observațiile lui Stoilow din 1942.

Mai întîi trebuie să constatăm că nu există în textul lui Barbilian nici o referire la o discuție cu Stoilow pe această temă. Mai mult, găsim în acest text unele considerații care vin în contradicție cu cele ale lui Stoilow. Astfel, pentru Barbilian analiza matematică nu este o doctrină (în sensul Programului de la Erlangen), deoarece ea (chiar în forma ei clasică) se constituie într-un sistem deschis de cunoștințe, care scapă axiomatizării, în opoziție cu topologia, teoria lui Galois a ecuațiilor, teoria funcțiilor automorfe sau diferitele geometrii (euclidiene, neeuclidiene, proiective etc.) care se consti-

tuie în sisteme închise, în sensul că, oricare ar fi numărul teoremelor dezvoltate în interiorul sistemului, nu părăsim niciodată un cadru prealabil fixat, cadru obținut prin aceea că toate rezultatele obținute pot fi interpretate ca invarianții ai grupului fundamental. Dimpotrivă, în viziunea lui Stoilow analiza clasică are trăsăturile unei teorii axiomatice, a unui sistem închis (chiar dacă el nu folosește această terminologie), rolul grupului fundamental fiind îndeplinit aici de grupul transformărilor oricărui șir convergent de numere raționale într-un altul echivalent. Ne dăm seama deci că observațiile lui Stoilow au într-o anumită măsură un caracter polemic, ele reprezintă o replică la viziunea lui Barbilian, dar o replică pozitivă, în sensul că ea este în primul rînd un act de adeziune la modul de a vedea al lui Barbilian și la importanța distincțiilor pe care acesta le operează. Însă, în interiorul acestei adeziuni, Stoilow își ia distanță în unele puncte, după cum aduce noi precizări și propune noi distincții în altele. Desigur, nu este exclus ca Barbilian să fi avut în vedere alte faze din dezvoltarea analizei decît aceea considerată de Stoilow, căreia chiar acesta din urmă îi recunoaște caracterul limitativ, în sensul că se referă la partea de început a dezvoltării acestei mari discipline matematice. Dealtfel, chiar Barbilian atrăgea atenția asupra faptului că anumite capitole ale analizei au toate trăsăturile unei teorii axiomatice în care rezultatele obținute pot fi interpretate în termeni de invarianță față de un grup fundamental. El dă în această privință, exemplul teoriei lui Lie a ecuațiilor diferențiale: de ce nu ar fi continuumul real analizat de Stoilow un al doilea exemplu în acest sens? Deosebirea de viziune între cei doi autori nu apare deci la acest nivel, ci într-o fază ulterioară, în care Stoilow propune trecerea de la grupul inițial la diferite supra-grupuri, în vederea captării dezvoltărilor ulterioare ale disciplinei în discuție. Dar, desigur, întreaga problemă reclamă o analiză mai aprofundată, iar modul în care Stoilow a preluat, aici, ștabela de la Barbilian este un exemplu de polemică științifică fecundă și creatoare.

Dar lucrurile nu se opresc aici. Partea cea mai interesantă a problemei o constituie modul în care atît Barbilian cît și Stoilow tatonează aici dificultăți de natură celora care fuseseră puse în evidență în 1931 de către Gödel, prin faimoasele sale rezultate privind incompletitudinea sistemului formal al

aritmeticii și eșecul Programului lui Hilbert. După cunoștința noastră, Barbilian nu corelase cercetările sale privind doctrinele axiomatice cu rezultatele lui Gödel, care vizau de fapt direct aceste cercetări. Stoilow ajunge, în considerațiile sale, mai aproape de problematica Hilbert-Gödel, dar tot nu realizează joncțiunea necesară. Ironia acestei situații apare în faptul că, chiar în Caietul XV aici în discuție, el conspicează articolul lui Marshall Stone, *Viitorul matematicii*, din *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 1957. Însă, după cum se vede, deși ne aflăm în același caiet, distanța în timp, față de dialogul cu Barbilian, este de 15 ani. Articolul lui Stone este centrat pe modul în care teorema lui Gödel a înșelat speranțele puse în Programul lui Hilbert și pe dificultățile create astfel în calea dezvoltării matematicii. În ultima parte a observațiilor sale relative la considerațiile lui Barbilian, Stoilow se apropie, fără însă a-și da seama de aceasta, tocmai de problemele cărora Gödel le-a dat un răspuns atât de neașteptat. Într-adevăr, Stoilow se întreabă (ne vom depărta acum de terminologia sa, pentru a ne apropia de aceea a lui Gödel) dacă este posibil să ne asigurăm că un sistem de axiome este complet, cu alte cuvinte dacă orice propoziție formulată în termenii sistemului este, în raport cu sistemul, adevărată sau falsă. Stoilow își dă seama că însuși sensul acestei chestiuni urmează abia să fie precizat și înseamnă, în paranteze, această îndoielă: *et cela a-t-il un sens précis?* Tocmai aceste lucruri fuseseră precizate de Gödel, care arătase sensul exact al consistenței și completitudinii (*saturației*, cum spune Stoilow) unui sistem formal și demonstrase că, în mod special pentru sistemul formal al aritmeticii, în varianta Russell-Whitehead, aceste două deziderate nu pot fi satisfăcute simultan; dacă sistemul este consistent, atunci el nu este complet, cu alte cuvinte va exista o propoziție exprimată în termenii sistemului, astfel încât nici ea nici negația ei nu pot fi obținute în cadrul sistemului. Este deci firească mirarea lui Stoilow despre afirmația atribuită lui Barbilian, după care Hilbert ar fi demonstrat completitudinea sistemului formal al geometriei euclidiene. Numai că problema generală din *Beweistheorie*, cu a cărei formulare se încheie notele lui Stoilow, își primise, prin Gödel, răspunsul negativ. Întreaga discuție Barbilian-Stoilow ar merita o reconsiderare mai atentă, în raport cu toate achizițiile ulte-

rioare ale logicii matematice. Ea este, în orice caz, semnificativă pentru intuiția matematică a lui Stoilow și pentru interesele sale culturale în domeniul matematicii, interese care se extindeau mult dincolo de domeniul său propriu-zis de cercetare. Avem în față un model de formație matematică deschisă larg spre celelalte științe, spre filozofie, spre cultură.

Caietul XVI (care nu e propriu-zis un caiet, ci un ansamblu de foi volante) conține notele cursului predat în iarna 1942—1943 la Universitatea din București: Teoria metrico-topologică a suprafețelor de acoperire și aplicații la teoria funcțiilor meromorfe. Redactarea este, ca de obicei, impecabilă din punct de vedere logic, lingvistic și caligrafic. Același caracter îl are Caietul XVII (de asemenea alcătuit din foi volante), cuprinzând note la cursurile predate la Facultatea de științe în anii 1941—1943. Aproximativ din aceeași perioadă datează Caietul (mai degrabă un carnet) XVIII, nedatat și fără nici o indicație pe copertă. Conținutul este foarte eterogen: note privind topologia și teoria grupurilor (É. Cartan), uniformizarea funcțiilor analitice (H. Poincaré), cursurile predate de Montel (1931) și Lebesgue (Calculul variațional 1931), indicele lui Kronecker (Hadamard), cursul lui Julia (1931), transformări interioare (H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*; Stoilow, *Annales de l'École Normale*, 1928), precum și spicuri din articole diverse aparținând lui Sierpiński, Aronszajn, Mazurkiewicz, Eilenberg, Hausdorff, Polak, Alexandrov, Kolmogorov, Kierst (asupra căruia întîrzie mai mult), Whyburn, Montgomery, Wallace, Puckett, Zorn, Kérékjártó, Morse & Heins. Articolele conspectate datează din perioade foarte diferite, mergînd de la începutul secolului pînă în anul 1947. Interesant, în acest caiet cu lucruri atât de disparate, este și faptul că notele matematice alternează cu diferite note cu caracter filozofic, cultural sau literar, în mod vizibil note de lectură care ne dau o indicație despre cărțile nematematice pe care Stoilow le frecventa. Caietul începe cu un text de opt pagini *De la conversion des «intellectuels»*. Întîlnim apoi numeroase reflecții aparținînd unor autori dintre cei mai variați. Iată unele dintre ele: Universul nu este decît o greșală în puritatea neîntîrziei (Paul Valéry). Spiritul italian epurează realitatea; spaniolii sînt, dimpotrivă, realiști în pictură: Velasquez a pictat un portret al unei

doamne de la curtea lui Philippe al II-lea, în care o pată neagră îi acoperă ochiul drept bolnav. Italienii nu ar fi făcut niciodată așa ceva (Schneider, dec. 1930). Încrederea în Rațiune și în raționalitatea universului a constituit „miracolul grec”. Pentru a se explica o contradicție se face apel la Rațiune, la o rațiune superioară, în care se conciliază ceea ce părea contradictoriu (de exemplu, lungimile incomensurabile prin diviziune infinită; dimensiunile obiectelor variind cu distanța, prin legile perspectivei) (Rey, dec. 1930). Prin libertatea și bogăția sa, muzica reprezintă arta sub formele cele mai abundente și mai suple. ... Prin ea, pasiunea se conciliază cu rațiunea (Ed. Herriot: *Viața lui Beethoven*). *L'ont ne détruit pas ce que l'on remplace* (Danton). Don Quichotte către Sancho Pança: Dacă o femeie frumoasă îți cere dreptatea, ascult-o cu ochii închiși.

Caietul XIX, ultimul asupra căruia ne vom opri, este un carnet din perioada anilor 1958–1960 și conține note relative la seminarul de cercetare pe care-l conducea la Institutul de matematică al Academiei. Găsim aici notele lui Stoilow pe marginea unor expuneri făcute de colaboratorii săi cei mai apropiați: 16 oct. 1958, Cabiria Andreian, Cercetări asupra funcțiilor pseudo-analitice în U.R.S.S. (la înapoierea dintr-un voiaj de studii de 4 săptămâni); 23 oct. Martin Jurchescu, Compactificarea spațiilor complexe C^n . Spațiul proiectiv complex; 30 oct. Ion Bucur, Clasele lui Chern (continuare la 13 nov. și 20 nov.); 27 nov. Cornel Constantinescu, Exemplu că o suprafață riemanniană poate să fie prelungibilă chiar dacă: 1) toate elementele frontierei sînt de speța a doua; 2) toate domeniile Δ (care conțin elementele frontieră) sînt parabolice (Aceasta arată că o afirmație a lui De Possel și Heins nu este tocmă exactă); 4 dec. M. Jurchescu, Spații complet holomorfe I (continuare 11 dec.); 18 dec. V. Poenaru, Despre funcțiile plurisubarmonice (continuare 15 ian.); 29 ian. M. Jurchescu, Spații complexe Stein-Grauert; 5 febr. Cornel Constantinescu, Transformări în ea însăși ale sferei $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \leq 1$ (continuare 12 febr.); 19 febr. Ion Bucur, Definiția fascicolului (continuare 26 febr., 5 martie), 12 martie–19 martie, M. Jurchescu, 9 apr., 23 apr., 30 apr. I. Berstein, 7 mai, 14 mai, 21 mai I. Bucur, 28 mai I. Berstein. Urmează apoi note la expunerile din anul 1959–1960: 15 oct., 22 oct. M. Jurchescu, 5, 12, 26 nov. Constantinescu, 3 dec., 17 dec.,

24 dec. A. Cornea, 24 dec., 7 ian., 14 ian., 21 ian. 1960 N. Boboc, 28 ian. A. Cornea, 4, 11, 17 febr. M. Jurchescu, 24 febr. Ion Bucur (continuare 10, 17, 31 martie, 7 apr.), 14 apr. M. Jurchescu, 28 apr. I. Bucur, Caietul se încheie cu textul: Propus pentru 1960–1961: *Funcții de mai multe variabile complexe; varietăți și spații complexe*. Acesta avea să fie ultimul an de activitate a seminarului, sub conducerea lui Stoilow; dar seminarul Stoilow a continuat și funcționează și astăzi, după cum se poate afla, în mod detaliat, din capitolul relativ la activitatea lui Stoilow în teoria funcțiilor de variabilă complexă.

Contribuții în teoria funcțiilor analitice complexe și în topologie

Pentru matematicienii din întreaga lume Simion Stoilow este în primul rînd creatorul teoriei topologice a funcțiilor analitice, strălucită sinteză între noțiuni și rezultate de analiză pe de o parte, concepte și metode de investigație și demonstrație topologice pe de altă parte.

Prin notele publicate în „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris” în 1927 [15] și 1928 [16] și mai ales prin celebrul memoriu din 1928, *Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques* din „Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure” [17], Simion Stoilow pune bazele acestei noi ramuri a matematicii, introducînd concepte fundamentale, făurind instrumente și metode de cercetare de o deosebită eficiență. Noțiunea de transformare interioară definită și aprofundată în aceste lucrări îi va permite lui S. Stoilow să rezolve vestita problemă a lui L. E. J. Brouwer de caracterizare topologică a funcțiilor analitice. În cele aproape 50 de lucrări publicate ulterior și în renumita sa monografie [39], Simion Stoilow dezvoltă prin contribuții de o deosebită însemnătate teoria topologică a funcțiilor analitice, iar opera sa constituie pînă astăzi un izvor nesecat de noi cercetări.

Prin teoria topologică a funcțiilor analitice nu numai că se dezvăluie caracterul topologic al multora dintre rezultatele geometrice relative la funcțiile analitice de o variabilă complexă, dar se construiește cadrul natural de valabilitate al

generalizărilor teoriei clasice, generalizări impuse (după cum vom arăta mai jos) atât de probleme teoretice cât și de aplicații. Ea constituie un auxiliar prețios în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale, în mecanica fluidelor, în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe și mai ales în teoria evasiconformității și a aplicațiilor evasiregulate. Rolul ei în stimularea interacțiunii dintre analiză și topologie este subliniat cu tărie de cunoscutul topolog american G. T. Whyburn, autorul monografiilor *Analytic topology* (Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. 28, New York, 1942) și *Topological analysis* (Princeton Univ. Press, 1958), în prefața acestora din urmă. Profesorul Stoilow a indicat el însuși, analizând cu diferite prilejuri lucrările sale (a se vedea, de exemplu, *Pagini de autobiografie matematică*, din volumul [75] sau prefața monografiei [39]) importanța teoriei pe care o crease, pentru topologia generală, pentru teoria grupurilor topologice ca și pentru analiză. De atunci numeroasele lucrări, care au apărut și apar neconținut, aduc noi argumente în sprijinul acestor afirmații.

Clasicii teoriei funcțiilor, în deosebi Riemann și Poincaré, pusese în evidență prin lucrările lor legăturile adânci existente între analiză și topologie, așa-numita *analysis situs*. Conceptul de suprafață riemanniană, de exemplu, izvorit din ideea de prelungire analitică și de domeniu de existență al funcțiilor analitice (a se vedea prefața monografiei [39] sau capitolele IV și X din [71]), care avea să devină în secolul nostru cadrul de dezvoltare al teoriei acestor funcții, ca și întreaga operă a lui Riemann au reliefat importanța problemelor de topologie pentru celelalte ramuri matematice, constituind unul dintre principalii factori de progres (a se vedea și B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1923, pp. 2—3). La rîndul său noțiunea de suprafață riemanniană a putut fi definită riguros doar în celebra carte a lui H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Teubner, Leipzig, 1913) odată cu dezvoltarea topologiei, a teoriei spațiilor abstracte și a varietăților topologice. Dar despre teoria topologică a funcțiilor analitice se poate vorbi abia după apariția memoriilor lui S. Stoilow și mai ales a monografiei sale [39].

Iată cum prezintă G. T. Whyburn în prefața cărții sale *Topological analysis* pe principalii autori ai acestei teorii:

(1) S. Stoilow [17], [39], creatorul aplicației (transformării) interioare sau deschise, cel care a recunoscut cel dintîi 0-dimensionalitatea (*the lightness*) și invariarea multîmilor deschise (*the openness*) drept cele două proprietăți topologice fundamentale ale clasei tuturor funcțiilor analitice neconstante.

(2) S. Eilenberg (*Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, „Fund. Math.” 26 (1936), 61—112), și C. Kuratowski (*Homotopie et fonctions analytiques*, „Fund. Math.”, 33 (1945), 316—367 și volumul al II-lea al renumitului său tratat de topologie), care au folosit reprezentarea exponențială pentru aplicații și au legat-o de proprietăți ale multîmilor de puncte din plan.

(3) M. Morse, care în monografia sa *Topological methods in the theory of functions of a complex variable* (Ann. Math. Studies, vol. 15, Princeton Univ. Press, 1947; ediție în limba rusă apărută în Izd. inostr. lit., Moskva, 1951) ca și într-o serie de lucrări, împreună cu J. Jenkins sau cu M. H. Heins, a aprofundat invarianța indicilor topologici ai unei funcții în raport cu deformări admise de curbe în planul complex.

(4) Frații F. și R. Nevanlinna prin cercetările lor de teoria distribuției valorilor funcțiilor analitice, prezentată de exemplu de R. Nevanlinna în fundamentalul tratat *Eindeutige analytische Funktionen* (Springer-Verlag, Berlin, 1936; ed. a II-a, 1953) și L. V. Ahlfors prin teoria metrico-topologică a acoperirilor riemanniene („Acta Math.”, 65 (1935), 157—194).

(5) Matematicieni care la începutul celui de al șaselea deceniu adîncesc studiul transformărilor interioare și dintre care Whyburn citează pe H. D. Ursell și H. C. Eggleston, precum și pe C. J. Titus și G. S. Young (asupra acestor cercetări vom reveni).

La această enumerare trebuie adăugat, desigur, pe G. T. Whyburn însuși, care, prin anii 1936, plecînd de la studierea unora dintre memoriile lui S. Stoilow, a consacrat subiectului un amplu ciclu de lucrări și ale cărui monografii au contribuit esențial la răspîndirea noțiunilor de transformare interioară, transformare deschisă etc. Atît de mult, încît adeseori rezultatele lui Stoilow sînt citate „teorema lui Stoilow și Whyburn” sau, pur și simplu, fără nume printr-o trimitere la cărțile lui Whyburn. Morse însuși scrie în prefața la mono-

grafia menționată mai sus: „Autorii primelor lucrări despre transformările interioare sînt Stoilow și Whyburn”.

Literatura inspirată din opera profesorului Stoilow este astăzi extrem de bogată. În revistele internaționale de recenzii, de exemplu, „Mathematical Reviews” sau „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete”, ea se găsește nu numai în secțiunea intitulată chiar „Teoria topologică a funcțiilor” după clasificarea adoptată de American Mathematical Society, dar și în alte secțiuni relative la funcțiile de o variabilă complexă sau topologie generală, în special în secțiunile despre aplicații continue, aplicații deschise etc.

Vom prezenta în cele ce urmează lucrările consacrate de S. Stoilow teoriei topologice a funcțiilor analitice, sub semnul celor două concepte fundamentale, pe care matematica i le datorează: transformarea interioară și acoperirea riemanniană. Vom urmări totodată și unele dintre lucrările ulterioare ce se înscriu în vasta perspectivă deschisă de Stoilow cercetării matematice.

În *Memoriul asupra lucrărilor științifice* din 1938 ([75], pp. 9—19) lucrările, pe care le vom discuta aici, sînt grupate de autorul lor într-o a treia perioadă de creație, dar rădăcinile acestei perioade, marcate de descoperirea transformărilor interioare, se află în etapa anterioară consacrată funcțiilor reale și în deosebi funcțiilor și transformărilor continue.

O trăsătură specifică operei marelui nostru matematician este caracterul ei unitar. După cum arată S. Stoilow în expunerea din 1961 a lucrărilor sale (*Exposé sommaire de mon travail de recherche* [75], p. 32), opera sa urmărește „să aprofundeze în ceea ce are el mai esențial fenomenul de *analiticitate*, care ne este impus într-un anumit mod chiar de natura în mijlocul căreia trăim”. Iar în interviul acordat cu ocazia primirii „Premiului de Stat” la 23 iulie 1954 ([75], p. 20) el explică: „Analiticitatea este acel caracter al funcțiilor care le face mai apte de a exprima legile naturii, cel puțin într-o primă aproximație a lor. Noțiunea de analiticitate, care a fost limpede și bine degajată de-abia pe la mijlocul secolului trecut, închide în ea, sub o formă abstractă și precisă, mai toate particularitățile esențiale pe care știința experimentală în decursul veacurilor le-a descoperit în structura legilor naturii și le-a pus în expresiile matematice prin care a formulat aceste legi.

În cercetarea problemelor de acest fel mi-au fost de mare folos acele considerații generale geometrice calitative pe care știința modernă le-a întrunit într-o disciplină matematică proprie sub numele de topologie. Topologia a pătruns azi în cele mai variate domenii ale matematicii; în teoria funcțiilor, în particular, ea a dus la importante rezultate, de însemnătate principială ca și metodologică...”.

Găsim formulată cu claritate în acest citat ideea de bază a teoriei topologice a funcțiilor analitice. Pentru a înțelege însă condițiile ce au condus la fondarea acestei teorii, să examinăm succint situația teoriei funcțiilor analitice în anii douăzeci, în momentul apariției notelor și memoriului lui Stoilow [15]—[17].

Vreme de peste un secol, teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă fusese unul dintre domeniile matematice cele mai bogate în rezultate, dar noile descoperiri de teoria mulțimilor și teoria funcțiilor reale, aprofundarea continuului numeric, din care s-au dezvoltat în primele decenii ale secolului nostru algebra modernă abstractă și topologia generală, lărgiseră orizontul cercetărilor matematice. Metoda axiomatică pătrundea tot mai mult, ducînd la analiza fundamentelor diferitelor teorii.

În *Memoriul asupra lucrărilor științifice* citat mai sus, Stoilow scria, dezvăluindu-ne unele din ideile ce l-au călăuzit în crearea teoriei sale:

„Una dintre tendințele caracteristice ale spiritului matematic modern este, evident, examinarea mai de aproape a ipotezelor... Este unul dintre principalele scopuri ale analizei moderne de a elimina toate ipotezele care nu sînt necesare concluziei. Prin extinderea acestui scop, se examinează și cazuri cînd înlăturarea unei părți din ipoteze modifică într-o anumită măsură concluzia, dar îi păstrează totuși o formă învecinată. Se merge astfel spre generalizare...”

Deodată cu tendința manifestată prin eliminarea progresivă a ipotezelor neesențiale, își face zi din ce în ce mai mult în matematica modernă grija de a pune la baza diverselor teorii elementele lor cu adevărat fundamentale. În această preocupare dominantă își află dealtfel adevăratul său rost întregul proces de purificare întreprins prin înlăturarea treptată a tuturor condițiilor inutile din definiții și raționamente”.

Aceste probleme se ridicau în deceniul al treilea și în legătură cu teoria funcțiilor analitice. A considera filonul clasic epuizat nu ar fi desigur exact, ținând seama că în acești ani se dezvoltă de exemplu teoria lui R. Nevanlinna a distribuției valorilor. Tendința analizării ipotezelor și înlăturării celor necesare era însă evidentă în rezultatele unor É. Goursat, P. Montel, H. Bohr, sau D. E. Menšov. Ideea largirii cadrului analitic apăruse în diferite lucrări, printre care vom menționa în primul rând ciclul publicat de D. Pompeiu începând din 1912 (a se vedea Dimitrie Pompeiu, *Opera matematică*, Editura Academiei, 1959, pp. 136, 150, 153, 158, 167, 173, 197, 249), prin care el extinde pentru funcțiile complexe de clasă C^1 formula integrală a lui Cauchy, formulă denumită astăzi Cauchy-Pompeiu, introduce derivata areolară și definește clasa funcțiilor monogene (α), respectiv olomorfe (α). Această clasă cuprinde funcțiile olomorfe ca un caz particular. Conceptele și rezultatele lui D. Pompeiu aveau să dobândească treptat o importanță deosebită în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale și în teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe (unde, e drept, ele aveau să fie regăsite în mod independent). Subliniem aici doar rolul novator al ideilor lui Pompeiu în depășirea tiparelor clasice ale analiticității.

Funcțiile complexe de clasă C^1 aveau să fie studiate de diferiți autori, iar E. Kasner a propus pentru ele în 1927 denumirea de funcții poligene. Aceste funcții aveau să fie aprofundate și în tezele de doctorat susținute în 1928 la Paris de G. Călugăreanu și Miron Nicolescu, după cum și alți matematicieni români N. Ciorănescu, Gr. C. Moisil, N. Teodorescu vor aduce contribuții remarcabile pe calea deschisă de Pompeiu.

Tot în 1928 în „Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig”, 80, apar și lucrările lui H. Grötzsch, care pun bazele evisiconformității, generalizare deosebit de importantă a teoriei funcțiilor analitice. Grötzsch consideră homeomorfisme de clasă C^1 cu jacobian pozitiv. Se știe că în cazul particular al reprezentărilor conforme cercuri infinitezimale sînt transformate în cercuri infinitezimale, în sensul că aplicația afină asociată reprezentării în fiecare punct invariază cercurile, fiind obținută prin compunerea unei translații, omotetii și rotații. Pentru o funcție complexă de clasă C^1 cu jacobian

pozitiv cercuri infinitezimale sînt transformate în elipse infinitezimale cu raportul dintre axa mare și axa mică depinzînd de punct. Acest raport numit cît de dilatare este unul dintre modurile de a măsura abaterea funcției de la analiticitate. Grötzsch impune cîtului de dilatare condiția de a fi mărginit, obținînd o clasă de aplicații (numite de Ahlfors, în 1935, evisiconforme), care păstrează multe din proprietățile clasice ale funcțiilor analitice. Ulterior, L. V. Ahlfors, M. A. Lavrentiev, O. Teichmüller și mulți alții vor studia aplicațiile evisiconforme, într-o formă generalizată cuprinzînd funcții diferențiabile numai aproape peste tot, supuse în punctele de diferențiabilitate unei condiții de tipul celei indicate.

În aceeași direcție a generalizării analiticității se înscrie și teza *Über die Grundlagen der Funktionentheorie* susținută la Göttingen în 1925 de matematicianul maghiar K. Szilárd, dar publicată abia în 1927 în „Mathematische Zeitschrift”, 26, 5 (1927), 653—671, teză a cărei temă propusă de R. Courant este formulată de autorul ei în modul următor: „Ce proprietăți de bază generale ale funcțiilor analitice sînt suficiente pentru a putea demonstra teoremele esențiale ale teoriei funcțiilor?”

Enumerarea aceasta de extinderi ale analiticității ar putea continua și ar putea fi completată prin citarea unor lucrări, care, fără să se preocupe de o nouă clasă de funcții, analizează diferite proprietăți caracteristice analiticității sau condițiile de valabilitate ale unor teoreme din acest domeniu.

În această atmosferă de căutări intense, menite să lărgescă cadrul clasic al teoriei funcțiilor, dar în care adesea nu se renunță decît parțial la elementele metrice, specifice noțiunii de funcție analitică, lucrările lui Simion Stoilow aduc o nouă orientare. Stăpînind în mod desăvîrșit instrumentele topologiei, el cercetează teoria funcțiilor analitice din punctul de vedere al acesteia, și introducînd în 1927 noțiunea topologică de *transformare interioară*, determină clasa de aplicații cu aceleași proprietăți topologice ca și funcțiile analitice.

Preocupări de a distinge proprietățile topologice ale funcțiilor analitice întîlnim în aceeași epocă și în opera altor matematicieni. Vom cita în acest sens cercetările întreprinse

de O. Onicescu, care l-au condus la clasa funcțiilor olotope (a se vedea prezentarea de sinteză din „Bull. Math. Soc. Sci. Math. Fiz. R. P. R”, 7 (55), (1963), 203—223), teza lui K. Szilárd, citată mai sus, care introduce mai multe clase de funcții: funcțiile regulate de clasă Q , funcțiile de clasă F , funcțiile de clasă K , cercetările de mai târziu ale lui Max Zorn. În legătură cu rezultatele lui K. Szilárd și M. Zorn, Stoilow scria în *Exposé sommaire de mon travail de recherche* ([75], p. 28)...” dar, pe lângă că acestea urmăresc mai curînd să caracterizeze clasa funcțiilor analitice în ansamblul ei, ele folosesc un număr destul de mare de axiome. Definiția transformărilor interioare este, dimpotrivă, foarte simplă și pare, mai mult, cu totul naturală; ea este, într-adevăr, extinderea imediată a proprietății bine cunoscute a transformărilor topologice ale unui spațiu euclidian în altul de aceeași dimensiune, stabilită de Brouwer, și care afirmă că aceste transformări sînt deschise”.

În prefața la [65], cunoscutul matematician sovietic B. V. Șabat observă că, în esență, K. Szilárd ajunge tot la transformările interioare, dar nu supune această clasă unei cercetări destul de profunde. De fapt, Szilárd nu își propune în teza sa caracterizarea topologică a funcțiilor analitice. Accentul cade pe examinarea fundamentelor teoriei funcțiilor, pe generalizarea teoremelor ei, și el citează în special generalizările anterioare datorate lui E. Beltrami (reprezentări conforme între suprafețe) și S. Bernstein (o notă asupra căreia vom reveni mai jos), ambele lucrări care folosesc metode de geometrie diferențială și analiză. Astăzi este evident că funcțiile sale regulate de clasă Q coincid cu transformările interioare, dar acest fapt este doar o consecință a rezultatelor adînci ale teoriei lui Stoilow, căruia îi revine singur meritul de a fi definit noțiunea de transformare interioară și de a fi caracterizat topologic funcțiile analitice.

Stoilow ajunge la problema lui Brouwer venind dinspre topologie, dinspre teoria transformărilor continue. Homeomorfismele între varietăți invariază după teorema lui Brouwer mulțimile deschise. Dar există și transformări continue care au această proprietate de invarianță.

„Care sînt aceste transformări, adică prin ce se distinge clasa tuturor acestor transformări în mulțimea celor continue oare-

care, iată o întrebare, scrie Stoilow [75], p. 15, pe care o pune în mod natural teorema lui Brouwer.

În cadrul topologiei spațiilor mai generale, problema n-a fost atacată decît în ultimii ani și, în parte cel puțin, concepută de unii ca o extindere a rezultatelor mele relative la varietățile cu două dimensiuni”.

Astfel enunțată, problema dobîndește un aspect extrem de general. Cu toate progresele realizate ea nu este nici astăzi rezolvată. Să urmărim însă firul istoric al genezei epocalelor descoperiri ale lui Stoilow, plecînd după cum el însuși mărturisește [75], p. 14, de la procedeele de demonstrație pe care le întrebuițase pentru funcții reale de o variabilă reală, călăuzit de ideea de a le transporta în domeniul mai multor variabile, „mult mai puțin studiat”: „Am crezut, scrie el, potrivit și mai natural a considera întotdeauna transformări între spații cu același număr de dimensiuni, adică nu o funcție de n variabile, ci sisteme de n funcții de n variabile”.

Evident studiul trebuia început cu cazul $n=2$ și astfel Stoilow ajunge la cazul planului și la teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă, domeniu care îi era bine cunoscut din timpul studiilor și din prima perioadă de creație, dar la care acum se reîntoarce cu bogata experiență pe care o dobîndise între timp în teoria mulțimilor, funcții reale și topologie.

Citind printre rînduri ni se dezvăluie astfel o trăsătură necunoscută, fascinantă a creației lui Stoilow. Genialul matematician nu a rezolvat numai o problemă celebră de funcții analitice cu ajutorul topologiei, ci, mai mult, a rezolvat prima etapă a unei probleme fundamentale de topologie cu ajutorul funcțiilor analitice. Cît de adînc se întrepătrund aceste preocupări în concepția sa, răzbate și din ultima privire, pe care a aruncat-o în 1961 asupra realizărilor sale și perspectivelor viitoare [75], p. 32:... „noțiunea pur topologică de transformare interioară, generalizare naturală a celei de transformare topologică, conduce *direct* la noțiunea de acoperire ramificată în felul acoperirii riemanniene pe care, *a priori*, o puteai crede legată indisolubil de ciclul rădăcinilor unui număr complex, care, istoric i-a dat naștere.

Esti astfel ispitit să gîndești că teoria funcțiilor analitice «de o variabilă complexă» (exceptînd în ceea ce privește problemele de reprezentare analitică sub o formă dată) nu are

nimic a face cu variabila complexă: rezultatele moderne asupra funcțiilor evasiconforme par să justifice într-adevăr această opinie”.

Să ne reîntoarcem însă în 1926. Lăsând de o parte considerațiile metrice din nota publicată de Stoilow în acel an [14], găsim definită în această lucrare noțiunea pur topologică de *punct singular* al unei transformări continue de n variabile, noțiune fundamentală pentru definirea transformărilor întregi, deci pentru întreaga sa teorie:

Fie T o transformare continuă

$$(1) \quad X=f(x,y), \quad Y=g(x,y)$$

definită într-un domeniu (mulțime deschisă și conexă) d din planul (x,y) cu valori în planul (X, Y) . Un punct p din d se numește punct singular pentru T , dacă există un domeniu δ , astfel încât $p \in \delta \subset d$, dar $P=T(p) \in \text{fr } T(\delta)$. Despre punctele singulare Stoilow demonstrează că imaginea lor prin T constituie o mulțime de prima categorie a lui Baire.

În acest moment, în fața lui Stoilow se deschid două căi: a aprofunda transformările fără puncte singulare sau a cerceta mai departe structura imaginii prin T a mulțimii acestor puncte pe baza unor proprietăți metrice. Importanța deosebită a rezultatelor, pe care le obține în prima direcție, îl determină însă să trateze pe cea de a doua abia în memoriul din 1929 [19]. Dat fiind faptul că rezultatele din această din urmă direcție se referă la mulțimea imagine a mulțimii punctelor singulare, el introduce denumirea de *valoare singulară* pentru imaginea unui punct singular și, dezvoltând ideile din nota [14], introduce o clasificare a valorilor singulare legată de noțiunea de punct de densitate al unei mulțimi măsurabile după Lebesgue și de alte proprietăți geometrice mai speciale [19].

În 1927 Stoilow se concentrează însă asupra transformărilor continue fără puncte singulare, transformări denumite astăzi *deschise*. Deplin convins de importanța acestei clase de transformări, care cuprindea pe de o parte transformările topologice și pe de altă funcțiile olomorfe, Stoilow subliniază de la începutul notei [15] faptul că studiul lor va pune în evidență proprietăți topologice ale funcțiilor analitice. Nota aceasta este consacrată unui aspect mult dezbătut în literatura timpului, celebra teoremă a lui Picard: o funcție întreagă,

care nu se reduce la un polinom, ia de o infinitate de ori orice valoare complexă exceptând cel mult una.

Este izbitor rolul jucat de această teoremă în cadrul generalizărilor analiticității, rol datorat în bună parte poziției ei de model în teoria distribuției valorilor. Astfel, S. Bernstein dăduse, cu instrumente de geometrie diferențială și analiză legate de problema Dirichlet, extinderi ale teoremelor lui Liouville și Picard pentru funcții suficient de regulate, soluții ale unui sistem de ecuații liniar și omogen, care generaliza sistemul Cauchy-Riemann („C. R. Acad. Sci. Paris”, 151 (1910), 636—638). Teorema lui Picard este totodată primul rezultat semnificativ demonstrat pentru aplicațiile evasiconforme de clasă C^1 , chiar în memoriul din 1928 prin care H. Grötzsch le introduce. În decada următoare, aceeași teoremă este stabilită de M.A. Lavrentiev pentru funcțiile aproape analitice, mai generale decât aplicațiile lui Grötzsch, în importantul memoriu: *Sur une classe de transformations continues* din „Mathematischeskii. Sbornik”, Moskva, 42 (1935), 407—423 și de S. Kakutani în memoriul: *Applications of the theory of pseudoregular functions to the type-problem of Riemann surfaces*, („Japan. J. Math.”, 13 (1937), 375—392). Ea este studiată de O. Onicescu în cadrul teoriei sale a funcțiilor oloptope.

În nota [15], S. Stoilow analizează însă teorema lui Picard din punct de vedere pur topologic. El consideră o transformare continuă T fără puncte singulare, definită pe întreg planul (x, y) cu valori în planul (X, Y) . Transformarea T fiind deschisă, mulțimea valorilor D este un domeniu. În general complementul lui D în raport cu planul, mulțimea valorilor lacunare, nu se reduce la cel mult un punct, așa după cum stabilea teorema lui Picard în cazul în care T era o funcție întreagă, și nici ordinul de conexiune al lui D nu rămâne cel mult egal cu 2. Stoilow reușește să generalizeze însă, într-un context pur topologic, acea parte a teoremei lui Picard, care afirma că o funcție întreagă transcendentă, în afară de cel mult o valoare excepțională, ia orice altă valoare de o infinitate de ori. În acest scop el reține faptul că o valoare excepțională este în același timp și valoare asimptotică. (Să menționăm că pentru o transformare continuă $T: X \rightarrow Y$ de la un spațiu topologic X într-un spațiu topologic Y , un punct $A \in Y$ se numește valoare asimptotică, dacă există un drum (aplicație continuă) $\lambda: [0,1) \rightarrow X$ tinzând la frontiera lui X , pentru care drumul ima-

gine $A = T(\lambda)$ tinde la A : $\lim_{t \rightarrow 1} T[\lambda(t)] = A$, unde am notat cu t variabila în $[0,1)$. Un drum λ tinde la frontiera lui X , dacă oricare ar fi compactul $K \subset X$, există $t_0 \in [0,1)$ pentru care $\lambda([t_0,1)) \subset X \setminus K$. Imaginînd o tehnică de ridicare a drumurilor asupra căreia vom reveni, deoarece ea constituie unul dintre principalele instrumente de demonstrație în întreaga sa teorie, S. Stoilow stabilește următoarea propoziție derivată din teorema lui Picard: Dacă D nu este simplu conex și nu cuprinde nici o valoare asimptotică a lui T , orice punct din D este imaginea prin T a unei infinități de puncte din planul (x,y) .

O a treia notă [16] publicată de S. Stoilow tot în „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris”, în 1928, marchează o nouă etapă în evoluția cercetărilor marelui matematician român asupra transformărilor continue. Nu numai că nota conține denumirea de transformare interioară și definiția ei, dar dovedește că în acel moment, Stoilow stăpînea principalele rezultate relative la aceste transformări, care îi permit să stabilească legătura lor cu conceptul metric de transformare cu variație mărginită introdus de Banach („Fund. Math.”, 7 (1925), 225–236), și anume: *orice transformare interioară este transformare cu variație mărginită*.

Lucrarea de sinteză nu mai putea întârzia. Ea apare chiar în același an [17], constituind pînă astăzi nu numai o lucrare de referință, dar și un model neîntrecut de expunere matematică, prin claritatea înlănțuirii ideilor, spiritul de analiză critică specific gîndirii axiomatice, alternanța părților deductive cu exemplificări, comentarii și probleme deschise. În cadrul acestui memoriu domeniul de definiție al transformărilor considerate este un domeniu din plan, iar valorile sînt luate de asemenea în plan. Este clar că pentru S. Stoilow acesta era cadrul impus de aplicațiile pe care le urmărea, dar transformările interioare puteau fi definite între spațiile topologice oarecare.

Stoilow folosea sistematic în acea epocă denumirea de regiune pentru o mulțime deschisă și conexă. Vom întrebuița însă în loc de regiune cuvîntul astăzi uzual de domeniu, pe care, dealtfel, el însuși îl utilizează în tratatul său de teoria funcțiilor, dar vom păstra pe cît posibil notațiile sale.

O transformare continuă T definită pe un domeniu r din planul (x,y) cu valori în planul (X,Y) se numește *interioară* dacă

1° Orice punct interior unui domeniu închis și mărginit d din r este transformat de T într-un punct interior imaginii $T(d)$ a lui d .

2° Nici un continuu (mulțime închisă și conexă, nedegenerată la un punct) din r nu este transformat prin T într-un punct.

Definiția se poate formula spunînd că transformările interioare sînt transformările continue, care invariază noțiunile de 1° mulțime deschisă și 2° continuu. Printr-un exemplu Stoilow arată că cele două axiome ce definesc transformarea interioară sînt independente. Astăzi transformările care satisfac condiția 1° se numesc *deschise*, iar cele ce îndeplinesc condiția 2° se numesc *0-dimensionale*, deoarece preimaginea oricărui punct $A \in R = T(r)$ este o mulțime total discontinuă, i.e. componentele ei conexe sînt puncte. Terminologia a variat însă în timp. Plecînd de la formularea condiției 1° dată de S. Stoilow, în care accentul cade pe invariarea punctelor interioare, G. T. Whyburn a numit transformările deschise transformări interioare. Pentru transformările 0-dimensionale el a folosit denumirea de transformări *light*, care este larg utilizată și astăzi.

Îndată după definiție, Stoilow subliniază cele două clase importante de transformări interioare: transformările topologice sau homeomorfismele și funcțiile analitice. Conform definiției, noțiunea de transformare interioară este de natură topologică. Scopul principal al lucrării va consta în a arăta faptul că multe proprietăți topologice ale funcțiilor analitice subzistă pentru transformările interioare.

Un exemplu vine să illustreze strălucit această afirmație: principiul maximului modulului, pe care Stoilow îl demonstrează pentru transformări interioare (de fapt deschise) printr-un argument geometric de o simplitate clasică și care este astăzi preluat în nenumărate manuale și tratate de funcții analitice sau armonice, înlocuind raționamentul analitic bazat pe teorema de medie.

Memoriul cuprinde trei părți, primele două dezvoltînd rezultatele fundamentale enunțate în [16].

În prima parte, Stoilow făurește două instrumente extrem de importante pentru cercetare, deoarece, deși contextul în care sînt formulate este 2-dimensional, ele sînt aplicabile în condiții generale.

Unul dintre aceste instrumente este dat de conceptul de *domeniu normal* sau de *vecinătate normală*. Fie $R=T(r)$, Δ un domeniu compact din R (închis și mărginit în cazul nostru, cînd R este domeniu din plan), $A \in \text{int} \Delta$ și $a \in r \cap T^{-1}(A)$. Componenta conexă a lui $r \cap T^{-1}(\Delta)$, care conține punctul a , este numită de Stoilow *domeniul maxim* al lui Δ relativ la a și notată (Δ, a) . El este un domeniu închis, iar dacă este și mărginit se numește *domeniu maxim normal*.

Stoilow demonstrează următoarele proprietăți ale domeniilor maxime normale:

$$T[(\Delta, a)] = \Delta, \quad T[\text{fr}(\Delta, a)] = \text{fr} \Delta \quad \text{și} \quad T[\text{int}(\Delta, a)] = \text{int} \Delta.$$

Ulterior [25] un domeniu compact $\delta \subset r$ va fi numit *domeniu normal* pentru T dacă $T(\text{fr} \delta) \subset \text{fr} T(\delta)$; evident, atunci $T(\text{fr} \delta) = \text{fr} T(\delta)$.

Orice domeniu maxim normal este normal și reciproc.

Oricare ar fi $b \in \text{int}(\Delta, a)$ avem $(\Delta, b) = (\Delta, a)$.

Pentru orice $a \in r$ există $\epsilon > 0$, astfel încît, notînd $A = T(a)$, oricare ar fi $\Delta \subset \Gamma_a$ — cercul sau discul cu centrul A și raza ϵ , $A \in \text{int} \Delta$, Δ — domeniu compact, domeniul maxim (Δ, a) este normal, proprietate ce permite construirea unui sistem fundamental de vecinătăți normale.

Ca o aplicație este demonstrată *teorema fundamentală a transformărilor interioare*, cunoscută și sub numele de *teorema lui Stoilow de ridicare a drumurilor*: Cu notațiile de mai sus, oricare ar fi arcul simplu Σ cu originea A situat într-un cerc Γ_a suficient de mic, există un arc simplu σ cu originea a , care este reprezentat topologic de transformarea interioară T pe Σ , și cel mult un număr finit de astfel de arce cu originea în a . Rezultatul este extins apoi la arce simple din R , care nu conțin nici o valoare asimptotică, exceptînd poate A .

Ridicarea drumurilor constituie cel de al doilea instrument folosit cu măiestrie de Stoilow în construirea teoriei sale și care avea să-și păstreze eficiența în continuare. Stoilow subliniază legătura acestei metode cu rezultatele obținute de F. Iversen în teza *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Helsinki, 1914), pe care o va supune unei profunde analize, degajînd conținutul ei topologic și deschizînd în anii următori o largă perspectivă de lucru prin introducerea clasei de funcții, pe care o numește clasa (I) sau clasa Iversen.

Folosind domeniile normale și teorema fundamentală, Stoilow demonstrează în partea a doua a memoriului următoarele două teoreme extrem de importante:

Teorema 1. *Dacă T este o transformare interioară $r \rightarrow R$ ca mai sus, preimaginea $T^{-1}(A)$ a oricărui punct $A \in R$ este o mulțime formată numai din puncte izolate din r și evident fără punct de acumulare în r .*

Acest rezultat, care exprimă conținutul topologic al proprietății mulțimii zerourilor unei funcții analitice neconstante (și, în genere, al mulțimii unde funcția ia o anumită valoare), se formulează astăzi folosind denumirile de mulțime discretă pentru o mulțime de puncte izolate a unui spațiu topologic și de transformare discretă pentru transformările pentru care preimaginea fiecărui punct din mulțimea valorilor este mulțime discretă. El se enunță deci spunînd că o transformare interioară $T: r \rightarrow R$ este *discretă*.

Teorema 2. *Pentru fiecare $a \in r$ există un cerc închis Γ_a suficient de mic, astfel încît $d = (\Gamma_a, a)$ să fie domeniu normal, jordanian, limitat de o curbă simplă închisă γ , cu proprietățile:*

$$1^\circ \quad T^{-1}(A) \cap d = \{a\}.$$

2° *La o rază AB din Γ_a corespund în d un număr de $n \geq 1$ arce simple σ_j ($j=1, \dots, n$) cu originea a și extremitatea b_j pe γ , unde $\{b_j: j=1, \dots, n\} = T^{-1}(B) \cap \gamma$. Dacă $n > 1$ punctele b_j descompun γ în n arce simple γ_j , iar arcele σ_j descompun d în n «sectoare», domenii jordanice d_j cu frontiera formată din σ_j , γ_j și σ_{j+1} ($\sigma_{n+1} = \sigma_1$). Transformarea T reprezintă topologic interiorul fiecărui d_j pe interiorul lui $\Gamma_a \setminus AB$, fiecare σ_j pe AB și fiecare arc deschis γ_j pe circumferința lui Γ_a din care se scoate punctul B . Dacă $n=1$, T reprezintă topologic d pe Γ_a .*

Teorema 2, numită chiar de Stoilow *teorema de inversiune locală a transformărilor interioare*, arată echivalența lor topologică locală cu funcțiile analitice. Într-adevăr, transformările interioare se comportă în vecinătatea unui punct a arbitrar din r ca și transformarea $W = w^n$, n număr natural ≥ 1 , în vecinătatea lui $w=0$. Se poate asocia astfel fiecărui punct $a \in r$ un ordin de multiplicitate, numărul n de mai sus. Punctele cu $n > 1$, formînd o mulțime discretă fără punct de acumulare în r (așa cum formează și zerourile derivatei unei

funcții analitice neconstante), vor fi numite de Stoilow *puncte de ramificare*, cu ordinul de ramificare $n-1$ [22], extinzând terminologia din cadrul suprafețelor riemanniene. Să remarcăm totodată că domeniul normal d din teorema 2 poate fi construit într-o vecinătate arbitrară a punctului a .

Partea a treia a memoriului pe care îl analizăm, [17], reia ideea aprofundării topologice a teoremei lui Picard din nota [15], dezvoltând cu metoda ridicării drumurilor rezultatele din acea notă și completându-le. Sînt studiate *transformările interioare* $T: r \rightarrow R$ pentru care mulțimea valorilor asimptotice din R este punctuală. Se stabilesc trei condiții, fiecare suficientă pentru ca o astfel de transformare să ia de o infinitate de ori orice valoare neasimptotică din R :

1° existența unei valori neasimptotice luate de o infinitate de ori (condiție și necesară).

2° multipla conexiune a lui R .

3° existența a cel puțin unei valori asimptotice interioară lui R .

În aceste cazuri, remarcă Stoilow, frontiera lui r trebuie considerată global ca un punct singular esențial izolat de funcție analitică, arătînd valabilitatea teoremei lui Weierstrass pentru transformarea interioară respectivă. Această observație închide în germene principiul care îi poartă azi numele [46], [53].

Dimpotrivă, dacă pentru o transformare interioară $T: r \rightarrow R$, cu mulțimea valorilor asimptotice din R punctuală, două valori neasimptotice sînt luate de p , respectiv q ori în r , atunci orice valoare din R este luată de cel mult pq ori.

În acest punct al expunerii noastre putem lămuri afirmația făcută la p. 62. o funcție $f: r \rightarrow \mathbb{C}$, definită într-un domeniu r din plan, se numește, după Szilárd, regulată de clasă Q , dacă este continuă, discretă și dacă pentru orice domeniu jordanian d , inclus împreună cu curba sa frontieră γ în r , și orice $z_0 \in \text{int } d$ cu $f(z_0) \notin f(\gamma)$, $\text{var}_\gamma \arg[f(z) - f(z_0)] > 0$. De aici, arată Szilárd, rezultă între altele că f are proprietatea de invarianță a domeniului, prin urmare f este transformare interioară. Sînt necesare însă dificilele teoreme 1 și 2 ale lui Stoilow, de mai sus, pentru a deduce reciproca: dacă f este interioară și păstrează orientarea, atunci f este regulată de clasă Q , deci numai teoria lui Stoilow explică adevărata natură și importanța a conceptului lui Szilárd.

În același an 1928, S. Stoilow prezintă la Congresul internațional al matematicienilor de la Bologna o expunere de sinteză a teoriei sale [18]. De remarcat că domeniul de definiție și domeniul valorilor transformărilor interioare sînt considerate acum pe sferă. Apare astfel și cazul unei transformări interioare definită pe sferă cu valori în sferă, pentru care Stoilow stabilește surjectivitatea și finit-valența, subliniind că transformarea generalizează topologic funcțiile raționale, și menționează păstrarea rezultatului pentru transformări de la o suprafață compactă la sferă.

Anii următori aduc noi succese în desăvîrșirea teoriei. În centrul atenției lui Simion Stoilow se află acum *transformări interioare, care iau fiecare valoare a lor de un număr finit de ori*.

Memoriul [21] din 1929 cuprinde o reciprocă a teoremei lui Schoenflies (1898), teoremă după care imaginea topologică a unui domeniu jordanian este tot un domeniu jordanian, și anume limitat de imaginea topologică a curbei Jordan frontieră pentru domeniul dat. Reciproca, datorată lui Stoilow, arată că o transformare interioară a unui domeniu jordanian, care este topologică pe frontieră, este topologică în tot domeniul. Ea este un corolar al următoarei teoreme, pe care Stoilow o demonstrează printr-o analiză extrem de fină a cazurilor posibile, aplicînd din nou metoda ridicării drumurilor: Fie d un domeniu compact simplu conex și $T: d \rightarrow D$ o transformare interioară, surjectivă pentru care $T(\text{fr } d) \subset \text{fr } D$. Fie A și B două puncte diferite din $\text{int } D$ (sau chiar de pe $\text{fr } D$, dar în acest caz accesibile din $\text{int } D$), cărora le corespund în d un număr de p , respectiv q puncte diferite. Atunci oricare ar fi punctul $H \in \text{int } D$, $T^{-1}(H)$ conține cel mult $p+q-1$ puncte. Reciproca la teorema lui Schoenflies se obține pentru $p=q=1$.

În 1927 Ålander stabilise („C. R. Acad. Sci. Paris”, 184 (1927), 1411–1413) pentru o funcție meromorfă f într-un domeniu jordanian d limitat de o curbă simplă c cu tangentă continuă, funcție avînd modulul constant pe c , că numărul zerourilor derivatei lui f din d este dat de $p+m-1$, p fiind numărul zerourilor lui f din d , iar m numărul polilor socoțiți cu multiplicitatea 1. În 1930 Stoilow restabilește [22], simetria între zerouri și poli, înlocuind numărul zerourilor derivatei cu numărul punctelor de ramificare ale lui f socoțite cu ordinele de multiplicitate respective. Dacă acest nu-

măr este ρ , iar numărul polilor q , atunci $\rho = p + q - 1$. El descoperă formularea topologică a acestui rezultat: condiția $|f(z)| = \text{const}$ pentru z din C revine la faptul că f transformă C într-un cerc C , iar interiorul lui C este acoperit de d prin transformarea $Z = f(z)$ de p ori, în timp ce exteriorul lui C de q ori. Formula este extinsă apoi la transformări interioare $T: d \rightarrow S$, unde S este sfera, iar C o curbă jordaniană pe S , $T(C) = C$, p și q reprezintă numărul de puncte socotite cu multiplicitatea corespunzătoare din $T^{-1}(A)$, respectiv $T^{-1}(B)$, pentru A și B puncte în cele două domenii, în care C descompune sfera (i.e. gradele lui T pentru aceste domenii), iar ρ este suma ordinelor de ramificare pentru punctele de ramificare din d ale lui T .

Am insistat asupra acestei note a lui Stoilow pentru că ea constituie punctul de plecare al unei serii de lucrări consacrate ramificării acoperirilor, unde, printr-un proces de abstractizare a situației întâlnite aici, Stoilow definește importante tipuri de acoperiri riemanniene [26], [27], [37], [42].

Nota următoare [23] readuce tema criteriilor globale de biunivocitate pe care o tratase în [21]. Punctul de plecare este acum o importantă teoremă a lui Hadamard. Majoritatea criteriilor clasice de biunivocitate au caracter local; în lucrarea *Sur les transformations ponctuelles* („Bull. Soc. Math. France”, 34 (1906), 71–84), J. Hadamard demonstrase unul dintre primele criterii globale: O transformare continuă definită într-un spațiu euclidian n -dimensional cu valori în același spațiu este topologică („biunivocă și bicontinuu”), atunci și numai atunci când

- I. este local biunivocă
- II. transformă orice drum tinzând la ∞ într-un drum de lungime infinită.

Condiția metrică II este transformată de Stoilow într-o condiție topologică, care, alături de idei cuprinse în nota [22], va juca un rol deosebit în cercetările sale ulterioare. Restrângându-se la cazul 2-dimensional, el stabilește o propoziție mult mai generală:

Fie $T: r \rightarrow R$ o transformare interioară a unui domeniu r din sfera s pe un alt domeniu R din sfera S , care duce orice drum tinzând la frontiera lui r într-un drum tinzând la frontiera lui R . Atunci ordinul de conexiune al lui R (numărul componentelor conexe ale lui R) este cel mult egal cu ordinul de conexiune

al lui r și orice punct din R este imaginea unui același număr de puncte din r (socotite cu multiplicitățile respective).

În cazul în care r este planul sau sfera punctată, R va fi simplu conex. Adăugând ipoteza I, care revine la faptul că transformarea nu are puncte de ramificare, T va fi o transformare topologică. Dacă orice drum tinzând la frontiera lui r este transformat într-un drum tinzând la un punct bine determinat $A \in S$, atunci $R = S \setminus \{A\}$, ceea ce ne dă teorema lui Hadamard.

De remarcat încă faptul că, în această notă [23], Stoilow formulează noțiunea foarte generală de punct de ramificare al unei transformări, exact în termenii astăzi uzuali: un punct de ramificare al transformării este un punct în jurul căruia transformarea nu este local biunivocă. Totodată de subliniat ideile demonstrațiilor, devenite astăzi clasice în cadrul acoperirilor ramificate „fără frontieră” sau „nelimitate”, în cadrul acoperirilor definite de aplicații proprii, în topologie sau în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe.

În același an 1931, Stoilow introduce în nota [24] o altă noțiune, care urma să deschidă perspective largi cercetărilor ulterioare și al cărei conținut este departe de a fi epuizat, după cum arată lucrările ce îi sînt mereu consacrate. Este vorba de o importantă clasă de funcții analitice, definită topologic, deci și de o clasă de transformări interioare, la care Stoilow ajunge plecînd de la una din teoremele stabilite de Iversen în teza sa și de aceea o numește *clasa Iversen* sau *clasa (I)*.

În această notă, δ este un domeniu din planul variabilei z cu frontiera σ . O funcție $Z = f(z)$ meromorfă în δ este de clasă (I), dacă oricare ar fi drumul Σ din planul complex compactificat (Z), cu originea într-un punct $Z_0 = f(z_0)$, unde z_0 este un punct arbitrar din δ și cu extremitatea într-un punct oarecare Z_1 , elementul (Z_0, z_0) al funcției inverse a lui f se poate prelungi analitic pe un drum oricît de vecin de Σ , cu originea Z_0 și extremitatea oricît de vecină cu Z_1 .

Teorema lui Iversen asigură că funcțiile meromorfe în plan sînt de clasă (I), dar clasa aceasta este mult mai vastă, cum arată exemple simple obținute variînd pe δ . Mai mult, δ poate fi luat pe o suprafață riemanniană, astfel încît clasa cuprinde și funcții analitice multiforme.

Stoilow enunță în nota [24] rezultate relative la clasa (I), demonstrate pur topologic (în detaliu în [25]), în care istoria

matematicii poate găsi și unul din momentele constitutive ale unui întreg capitol al teoriei funcțiilor analitice, mult cultivat în ultimele decenii: teoria valorilor limită (*cluster set theory*).

Dacă f este o funcție meromorfă în δ , Stoilow notează cu L mulțimea valorilor limită ale lui f , adică mulțimea punctelor A din planul compactificat (Z) pentru care există un șir de puncte $z_n \in \delta$, $z_n \rightarrow \sigma$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$. Complementul lui

L față de (Z) constă din o mulțime cel mult numărabilă de domenii Δ_i , fiecare format de valori luate de același număr n_i de ori ($n_i \geq 0$).

Rezultatul fundamental stabilit de Stoilow afirmă:

Dacă f este de clasă (I) , poate avea loc numai unul din următoarele două cazuri:

1° L acoperă tot planul complex, inclusiv ∞ , deci funcția f satisface teorema lui Weierstrass relativă la singularități esențiale izolate, de data aceasta pentru frontiera σ considerată global.

2° L este mulțime total discontinuă, caz în care complementul lui L formează un singur domeniu Δ , fiecare valoare din Δ fiind luată de același număr finit n de ori, iar valorile din L fiind luate de $\leq n$ ori.

Teorema lui Picard se exprimă în cazul 1° prin proprietatea valorilor luate de un număr cel mult finit de ori de a forma o mulțime total discontinuă, iar relativ la valorile asimptotice se extinde un rezultat al lui Iversen: orice valoare luată în δ de un număr finit de ori în cazul 1°, respectiv de un număr de ori $< n$ în cazul 2°, este asimptotică.

Determinarea funcțiilor de clasă (I) va rămâne pentru Stoilow una din preocupările permanente. În această notă el indică apartenența la această clasă pentru funcțiile meromorfe în δ , ale căror valori asimptotice formează o mulțime punctuală sau vidă. Să remarcăm că astfel de funcții fuseseră considerate de el și în memoriul fundamental [17].

Întreaga notă [24] ar fi putut fi evident formulată pentru transformări interioare. Bănuim că Stoilow a preferat cadrul analitic, în scopul de a sublinia însemnătatea descoperirii sale chiar pentru teoria clasică. Într-adevăr, în notă nu era vorba de conținutul topologic al unor fapte cunoscute pentru funcțiile analitice, ci de rezultate noi pentru aceste funcții.

De aceea el se limitează să sublinieze natura topologică a demonstrațiilor, caracterul topologic al definiției și enunțurilor fiind evident. Titlul însuși *Asupra valorilor funcțiilor analitice în vecinătatea frontierei...* indică largirea tematicii anterioare, relative la teorema lui Picard și constituie o prevestire a cercetărilor de mai târziu, consacrate comportării funcțiilor analitice la frontiera suprafețelor riemanniene.

În 1931, lucrările marelui nostru matematician se bucurau deja de un succes deosebit. El este invitat de Facultatea de științe din Paris să le prezinte într-un ciclu de lecții și astfel, pe baza celor șase conferințe pe care le ține în februarie la Sorbonna, alcătuiește memoriul [25], publicat anul 1932 în „Annales de l'Institut Henri Poincaré”.

Prin această a doua lucrare de mare amploare, care avea să contribuie mult la cunoașterea și înțelegerea teoriei sale, S. Stoilow realizează prima parte a unui proiect extrem de original de a expune teoria funcțiilor analitice. Această primă parte, topologică, ar fi consacrată transformărilor interioare „care ar fi studiate cât mai departe posibil, fără a recurge la nici o considerație metrică, și abia partea a doua ar cuprinde proprietățile ce țin de natura metrică a analiticității”. Expunerea aceasta logică, afirmă mai departe Stoilow, n-ar fi poate didactică. Peste decenii, ideea este însă reluată de A. F. Beardon de la Universitatea din Cambridge, nu în întreaga ei cutezanță, e drept, dar cu convingerea că „geometria și topologia plană sînt părți necesare și vitale ale analizei complexe și, ca atare, trebuie tratate cu același respect și acuratețe ca și analiza însăși” (în manualul *Complex analysis*, J. Wiley and Sons, 1979).

Memoriul [25] constituie însă o adevărată încoronare a operei lui Simion Stoilow de pînă atunci, deoarece pune și rezolvă complet problema caracterizării topologice a funcțiilor analitice.

Începînd prin a analiza semnificația proprietăților topologice ale funcțiilor analitice, Stoilow definește transformările interioare și demonstrează echivalența topologică a oricărei transformări interioare cu o funcție analitică. Mai precis, fie r (pentru simplificare) un domeniu din plan sau din sfera S și $T: r \rightarrow R = T(r)$ o transformare interioară a lui r în domeniul R din sfera S . Folosind teorema de inversiune, descompune r în subdomenii d_i , ce nu se impietează, dar pe care

T este topologică. Construiește apoi suprafața riemanniană $\mathcal{Q}$ din imaginile $D_i = T(d_i)$, care acoperă R și racordează între ele, și anume două D_i au o parte frontieră comună, dacă d_i corespunzătoare au în comun o parte din frontierele lor. Este procedeul uzual în acea epocă de a forma suprafețele riemanniene ale diferitelor funcții analitice, racordând foi simple. Suprafețele r și $\mathcal{Q}$ sînt homeomorfe. Aplicînd teorema de uniformizare a lui Poincaré (în cazul r simplu conex) sau a lui Koebe (în cazul general), Stoilow reprezintă conform $\mathcal{Q}$ pe un domeniu r' dintr-o sferă s' . Se obține astfel o transformare topologică $t: r' \rightarrow r$, în timp ce $F = T \cdot t$ este o funcție analitică pe r' . Iată cum ar arăta detaliată în limbajul de astăzi demonstrația: Fie τ homeomorfismul $\mathcal{Q} \rightarrow r$, φ reprezentarea conformă $r' \rightarrow \mathcal{Q}$ (deci $t = \tau \cdot \varphi$), iar π proiecția suprafeței riemanniene $\mathcal{Q}$ peste R determinată de T , $\pi = T \cdot \tau$. Prin urmare, $F = \pi \cdot \varphi$. Cum suprafața riemanniană $\mathcal{Q}$ este organizată transportînd metrica (structura) conformă a lui R pe $\mathcal{Q}$ prin π , rezultă că π este aplicație olomorfă (aici funcție meromorfă, deoarece $R \subset S$) și deci F este funcție analitică.

Ulterior [39], cap. V, III, după ce va fi construit teoria suprafețelor riemanniene de acoperire pe baza transformărilor interioare, Stoilow va demonstra această celebră teoremă în forma generală, în care r este o varietate topologică 2-dimensională.

Pe lângă prezentarea teoremelor fundamentale despre transformările interioare și demonstrarea rezultatelor din lucrările [21], [23] și [24], memoriul [25] cuprinde noi rezultate.

Stoilow analizează consecințele celor două variante topologice ale condiției metrice II din teorema lui Hadamard, variante formulate pentru transformarea interioară $T: r \rightarrow R$ în felul următor:

(*) orice drum din r tinzînd la frontiera lui r este transformat într-un drum din R tinzînd la frontiera lui R și, respectiv,

(**) orice șir de puncte $p_n \in r$ tinzînd la frontiera lui r este transformat într-un șir $P_n \in R$ tinzînd la frontiera lui R .

Fie $T: r \rightarrow R$ o transformare interioară oarecare. Stoilow arată că pentru orice domeniu normal $\delta \subset r$, există un număr n , astfel încît oricare ar fi $A \in \text{int } T(\delta)$, $T^{-1}(A) \cap \delta$ constă din exact n puncte (socotite cu multiplicitatea respectivă). El folosește condiția (**), care este verificată cînd în loc de r

și R scriem $\text{int } \delta$, respectiv $\text{int } T(\delta)$. Propoziția este stabilită apoi și pentru $T: r \rightarrow R$, transformare interioară cu proprietatea (**).

Dezvoltînd tematica din nota [24], Stoilow aprofundează acum mulțimea valorilor limită L pentru transformările interioare. Se arată de exemplu că orice domeniu $\Delta \subset R$, pentru care există un domeniu maxim $(\bar{\Delta}, a)$ cu $T[(\bar{\Delta}, a)] \not\supset \Delta$, conține cel puțin o valoare asimptotică, iar în cazul clasei (I) că orice punct din $\Delta \setminus T[(\bar{\Delta}, a)]$ este valoare asimptotică. Orice valoare limită luată de cel mult un număr finit de ori este fie valoare asimptotică, fie limită de valori asimptotice, mulțimea acestor valori limită fiind de prima categorie.

Să menționăm și grija cu care Stoilow formulează în tot cuprinsul memoriului diferitele rezultate de topologie sau teoria mulțimilor utilizate ca și faptul că înserează o demonstrație foarte simplă a teoremei lui Iversen, pe care o obține adaptînd procedeul lui Valiron din 1918 la tehnica sa a domeniilor maxime.

Celui care studiază volumul [74], ce cuprinde lucrările lui Simion Stoilow în ordine cronologică, i se dezvăluie, desigur, o trăsătură specifică creației marelui matematician: Stoilow nu părăsește o temă pînă nu o aduce la perfecțiune. Temele se succed și se împletesc reluate mereu pe o treaptă superioară de generalitate sau de aprofundare, ideile se dezvoltă în ani de reflexie. Preocupările sale, pe care le-am întîlnit pînă acum, relative la teoria topologică a distribuției valorilor, cu rădăcini în teoremele lui Schoenflies, Hadamard și Ålander pe de o parte, în teoremele lui Weierstrass, Picard, Iversen pe de alta, se întregesc cu noi aspecte și se transformă sub influența unei alte problematice majore în teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă — studiul suprafețelor riemanniene. Acest nou punct de vedere va apărea însă treptat.

În cele trei lucrări [26] — [28], care văd lumina tiparului în 1933, Stoilow adîncește rezultatele din [21], [23] și în deosebi [22], arătînd cum existența unui număr finit n , astfel încît orice valoare să fie luată de transformarea interioară considerată de n ori, derivă din comportarea acesteia la frontieră exprimată printr-o condiție de tip (*) (în unele cazuri chiar numai (*)) și cum această proprietate ca și variatele ei apli-

cații (teoreme de biunivocitate, teoreme despre ramificare) au o origine comună legată de formula lui Euler pentru poliedre. Deja în aceste lucrări, Stoilow tratează cazuri tot mai generale: în nota [26] și memoriul [27] transformarea interioară $T:s \rightarrow S$ este definită între suprafețe orientabile cu ordin de conexiune finit, iar dacă drept S este luată uneori tot sfera, aceasta numai în vederea aplicațiilor la funcții complexe; mergînd mai departe pe calea generalizării, memoriul [28] tratează spații topologice.

Se știe că o suprafață orientabilă s are ordinul de conexiune $c=2g+\mu$, dacă este echivalentă topologic cu torul generalizat cu g găuri $\mathcal{T}_g$ din care s-au scos μ puncte, g este genul, iar μ numărul de „elemente ale frontierei”, care la o reprezentare topologică a lui s în $\mathcal{T}_g$ devin componentele conexe ale frontierei. Același ordin de conexiune corespunde și unui domeniu $d \subset s$ cu închiderea $\bar{d}$ domeniu compact din s și frontiera formată din μ curbe simple închise γ_j disjuncte două câte două, dacă în reprezentarea topologică a lui s în $\mathcal{T}_g$ de mai sus, d se transformă în $\mathcal{T}_g \setminus \bigcup_i \Delta_i$, Δ_i fiind domenii jordanice dis-

juncte de pe $\mathcal{T}_g$. Stoilow preferă să numească domeniile $\bar{d}$, care sînt de fapt suprafețe bordate, *domenii poliedrice* deoarece ele devin astfel de domenii la o triangulare convenabilă a lui s .

În lucrările [26] și [27], Stoilow consideră mai întîi cazul unui domeniu $d \subset s$ cu $\bar{d}$ compact, pentru care:

1° $T(\text{fr } d)$ este format dintr-un sistem finit Γ de curbe jordanice disjuncte Γ_k ce determină pe S un număr finit de domenii R_i ,

2° frontiera lui d nu conține nici un punct de ramificare al lui T și

3° $T^{-1}(\Gamma) \cap d = \emptyset$.

Fie $T(d)=D$. Atunci, atît $T(\bar{d})=\bar{D}$, cît și $\bar{d}$ sînt domenii poliedrice, restricția lui T la d cu valori în D satisface (**) și numărul punctelor de ramificare ρ al lui T din d (socotite cu ordinele respective) satisface formula lui Hurwitz

$$(2) \quad \rho = c - 2 + n(2 - C),$$

unde c și C sînt ordinele de conexiune ale lui d și D , iar n numărul punctelor din d , care se transformă prin T în același punct din D .

În continuare Stoilow renunță la condiția 3° și obține importanta generalizare a formulei lui Hurwitz

$$(3) \quad \rho = c - 2 + \sum_i n_i(2 - c_i),$$

unde $n_i \geq 0$ reprezintă numărul punctelor din d , care se transformă prin T într-un punct arbitrar din R_i , iar c_i este ordinul de conexiune al lui R_i . Rezultatul se aplică în particular pentru $d \subset s$ suprafața riemanniană a unei funcții analitice, S sfera lui Riemann, iar T transformarea $s \rightarrow S$ corespunzătoare acestei funcții analitice, constituind o vastă generalizare a teoremei lui Ålander, generalizare care include și teorema lui Stoilow din [22].

Stoilow extinde însă mai departe cadrul problemei, obținînd aceeași formulă (3) și pentru transformări interioare $T:s \rightarrow S$ ale unei suprafețe orientabile s deschise de gen finit g (deci homeomorfă cu un domeniu din $\mathcal{T}_g$). În acest scop, el lărgeste condiția (**) în mod adecvat. În loc de 1° și 2°, el cere acum

(β_1). oricare ar fi șirul p_n din s , tinzînd către frontiera lui s , șirul $T(p_n)=P_n$ poate avea puncte limită numai pe un sistem finit de curbe Γ de pe S , sistem cu proprietățile de mai sus și

(β_2). $T^{-1}(\Gamma)$ este compact în s .

Suprafața orientabilă S este presupusă cu ordin de conexiune finit sau astfel încît domeniile R_i , care intersectează $T(s)$, au ordine de conexiune finite c_i . Finitudinea ordinului de conexiune al lui s nu trebuie postulată, ci ea rezultă din celelalte ipoteze.

Pe lîngă extinderea încă mai largă a teoremei lui Ålander închisă în acest ultim rezultat, pe lîngă o demonstrație imediată a teoremei lui Hadamard, Stoilow deduce din (2) și (3) noi criterii de biunivocitate legate de existența unui număr suficient de mare de valori cu preimaginea redusă la un singur punct [26], [27], [38].

Lucrarea [28] evidențiază odată mai mult profunzimea analizei la care Stoilow supunea problemele cercetate de el.

Într-adevăr, teorema lui Hadamard este demonstrată aici într-un context de mare generalitate:

Fie $T: e \rightarrow E$ o transformare interioară între două spații Hausdorff, liniar conexe, e și E , dintre care E este omotop simplu conex. Dacă transformarea T este local biunivocă și nici un drum din e fără punct limită (deci tinzând la frontiera lui e) nu se transformă prin T într-un drum tinzând la un punct limită din E (condiția mai slabă decât (*)), atunci T este un homeomorfism.

Stoilow discută cu multă finețe implicațiile diverselor ipoteze legate de teorema lui Hadamard: condiția II, condiția de mai sus, condiția (*), pe care o înlănțuie și în extinderile acestei teoreme date de Carathéodory și Rademacher în 1917 și de Carathéodory în 1924.

Cu prilejul Congresului interbalcanic al matematicienilor din 1934 de la Atena, Stoilow prezintă o magistrală dizertație [29] asupra interacțiunii dintre topologie și teoria funcțiilor, pe care o concepe larg, cuprinzând atât funcțiile analitice (caracterizarea topologică a acestor funcții pe baza rezultatelor sale asupra transformărilor interioare, unele cercetări din același an ale lui Kerékjártó relative la caracterizarea topologică a transformărilor conforme ale suprafețelor compacte), cât și funcțiile reale, aplicațiile între spații topologice (în legătură cu submulțimile măsurabile Borel și clasele Baire, prezentând, ca un exemplu, o frumoasă teoremă de prelungire a lui Kuratowski).

Din această conferință trebuie să desprindem însă interesul pe care îl purta Stoilow în acel moment suprafețelor riemanniene, cîmpul de variație al variabilei pentru funcțiile analitice multiforme. El subliniază proprietățile topologice ale acestor funcții, care se păstrează la înlocuirea suprafeței riemanniene printr-o suprafață topologic echivalentă cu ea. În acest context se impunea în mod natural problema caracterizării topologice a suprafețelor riemanniene, problemă pe care Stoilow o rezolvă în mod strălucit în anul 1935, cu ajutorul aceluiași concept fundamental de transformare interioară, [30], [32].

Încă din 1913, H. Weyl definise noțiunea de suprafață riemanniană, iar în 1925, în memoriul *Über den Begriff der Riemannschen Fläche* („Acta Szeged”, 2 (1925), 101–121), T. Radó adusese o importantă simplificare acestei definiții, care dobîndise astfel forma definitivă. Se știe că o suprafață

riemanniană este topologic echivalentă cu o varietate 2-dimensională triangulabilă și orientabilă. (Asupra definițiilor acestor noțiuni, a se vedea de exemplu [72], cap. VII.)

Rezultatul lui Simion Stoilow aducea o nouă și surprinzătoare caracterizare topologică a suprafețelor riemanniene:

Condiția necesară și suficientă ca o varietate 2-dimensională conexă să fie homeomorfă cu o suprafață riemanniană [30] sau, într-o formulare echivalentă, să fie triangulabilă și orientabilă [32] este ca să existe o transformare interioară a acestei varietăți în sfera euclidiană 2-dimensională.

Necesitatea pentru forma întâi este evidentă: pe orice suprafață riemanniană există funcții analitice (meromorfe) neconstante și aceste funcții rămîn transformări interioare prin compunere cu un homeomorfism. Pentru forma a doua, plecînd de la o varietate 2-dimensională V conexă, triangulabilă și orientabilă, Stoilow construiește, cu ajutorul unei triangulări a lui V , o suprafață riemanniană cu foi peste sferă, homeomorfă cu V și reduce astfel problema la forma întâi.

În nota *Interior mapping of an orientable surface into S^2* („Proc. Amer. Math. Soc.” 2 (1951), 951–952), M. Heins a dat o demonstrație constructivă foarte simplă și ingenioasă a acestei părți a teoremei lui Stoilow, parte cunoscută astăzi sub numele de *teorema lui Stoilow de existență a transformărilor interioare*. Să precizăm terminologia: suprafață în titlul lui Heins, ca și în lucrările altor autori, în particular și în unele lucrări ale lui Stoilow, înseamnă varietate 2-dimensională triangulabilă; în lucrarea de față denumirea de suprafață este folosită în sensul de varietate 2-dimensională. Demonstrația lui Heins a fost introdusă de Stoilow în [72], pp. 209–210. Se pare că Ahlfors a avut o idee similară cu cea a lui Heins, deoarece R. Nevanlinna menționează în tratatul său *Uniformisierung* o comunicare orală a lui Ahlfors pentru această demonstrație.

Suficiența existenței unei transformări interioare $T: V \rightarrow S$ pentru a deduce triangulabilitatea și orientabilitatea varietății V este demonstrată de Stoilow cu tehnica domeniilor maxime normale și teorema de inversiune locală. El folosește o acoperire numărabilă a sferei S cu o familie (Γ) de cercuri închise de centre alcătuiind o mulțime densă peste tot în S și de raze raționale și formează o acoperire a lui V cu domenii maxime normale (Γ, a) , unde $T(a)$ este centrul lui Γ , acope-

rire despre care arată că este numărabilă. Construiește apoi o triangulare a lui V astfel încât restricția lui T la fiecare dintre noile triunghiuri să fie un homeomorfism și imaginile a două triunghiuri adiacente să fie domenii jordaniane fără puncte interioare comune. Lanțurile închise de triunghiuri de pe V pot fi orientate coerent, deoarece în caz contrar lanțurile imagine de pe sferă ar schimba orientarea.

Caracterizarea topologică a suprafețelor riemanniene îl conduce pe Stoilow la o nouă definiție a acestor suprafețe, pe care o prezintă la Congresul internațional al matematicienilor de la Oslo din 1936, [36].

Definiția Weyl-Radó a suprafețelor riemanniene ca varietăți 2-dimensionale înzestrate cu o structură conformă, cu toată importanța ei pentru fundamentarea teoriei funcțiilor analitice, nu exprima întreaga bogăție a conceptului introdus de Riemann, deoarece se pierdeau complet noțiunile legate de modul de acoperire: foi și puncte de ramificare. „Pentru a păstra aceste noțiuni atât de folositoare în descrierea unei suprafețe sau a unei clase de suprafețe riemanniene, scria Stoilow în lucrarea [36], trebuie să se revină la conceptul primitiv de suprafață de acoperire”.

Fie T o transformare continuă a unei varietăți topologice 2-dimensionale conexe V în sfera S . În ce condiții relative la T , se întreabă Stoilow, acoperirea $[V, T(V)]$ poate fi considerată ca o suprafață riemanniană întinsă peste S . Iar teoria sa oferă răspunsul complet: atunci și numai atunci când T este o transformare interioară. Într-adevăr, varietatea V rezultă triangulabilă și orientabilă (conform [32]), iar teorema de inversiune locală asigură acoperirii caracterul specific riemannian, dat de modelul $Z=z^n$, n întreg ≥ 1 , în vecinătatea originii.

Proprietățile topologice ale suprafeței riemanniene sînt aceleași cu ale varietății V , pe care Stoilow o numește „tipul topologic” al suprafeței riemanniene, iar celelalte proprietăți rezultă din „modul de acoperire” dat de $T:V \rightarrow S$ și din transportarea metricii conforme de pe S pe V prin T . În concluzie, o suprafață riemanniană de acoperire este o suprafață de acoperire a sferei printr-o varietate 2-dimensională conexă după o transformare interioară ([39], cap. V, III sau [71], cap. X, II).

Stoilow menționează încă posibilitatea înlocuirii lui S cu orice altă varietate topologică 2-dimensională orientabilă și triangulabilă și încheie profetic: „Această definiție a acoperirii riemanniene este evident susceptibilă de diferite generalizări”.

Pentru a înțelege pe deplin frumusețea și importanța definiției lui Stoilow, să amintim că pentru a se putea folosi riguros suprafețe riemanniene de acoperire înainte de apariția acestei definiții, singura metodă consta în esență în triangularea convenabilă a suprafeței de acoperire și a celei de bază și în descrierea corespondenței triunghiurilor, astfel în cât restricția transformării de acoperire sau proiecției la fiecare triunghi să fie topologică, puncte de ramificare (de tipul $z = 0$ pentru $Z=z^n$, n întreg ≥ 1) putînd exista în unele vîrfuri. Descrierea era laborioasă, după cum se vede din tratatele de topologie ale lui Kerékjártó sau Seifert și Threlfall sau, de exemplu, din celebrul memoriu al lui L.V. Ahlfors despre teoria metrico-topologică a suprafețelor de acoperire din 1935, citat mai sus la p. 57.

Definiția lui Simion Stoilow a avut un succes extraordinar. Ea a fost prezentată imediat de L. V. Ahlfors în cadrul conferinței sale generale ținută la acest congres și intitulată *Geometrie der Riemannschen Flächen* (*Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens Oslo*, 1936, vol. I, A. W. Brøgers Boktrykkeri A/S, Oslo, 1937, pp. 239–247).

Subliniind importanța conceptului de suprafață riemanniană, Ahlfors arată că există două căi de a axiomatiza ideile lui Riemann. Una bazată pe cercetările lui Riemann de geometrie metrică, care a condus la conceptul de suprafață riemanniană a lui H. Weyl. A doua reținînd ca trăsătură esențială acoperirea, care a condus la conceptul pur topologic de suprafață de acoperire.

„Considerăm, scrie el (*op. cit.*, pp. 240–241), două suprafețe topologice date W și W_0 și o transformare $P_0=S(P)$. Oricărui punct $P \in W$ îi corespunde un punct proiecție (urmă) $P_0 \in W_0$. Pentru ca să fie definită o suprafață de acoperire, cerem ca S să fie o așa-numită transformare interioară. Acest concept a fost introdus de Stoilow și poate fi caracterizat prin următoarele condiții:

1. S este continuă.
2. Mulțimi deschise sînt transformate în mulțimi deschise.

3. Punctele P cu $S(P) = P_0$ sînt așezate izolat.

După Stoilow, condiția 3 poate fi înlocuită printr-una esențial mai slabă.

Se arată că S este local biunivocă, cu excepția anumitor puncte de ramificare așezate izolat, unde transformarea are caracterul unei puteri.

Tratarea pur topologică și clasificarea suprafețelor de acoperire este de cea mai mare importanță pentru teoria funcțiilor”.

Am citat acest fragment al conferinței lui Ahlfors, pentru că el reflectă modul în care rezultatele lui Stoilow au fost recunoscute spontan și au intrat în circuitul internațional al valorilor matematice.

La același congres, numele lui Stoilow apare însă și într-o altă conferință generală. Este vorba de expunerea *Einige Methoden und Ergebnisse aus der Topologie der Flächenabbildungen* (în același vol. I al lucrărilor Congresului, pp. 128—139) a cunoscutului matematician danez J. Nielsen, care comentează direcția cercetărilor lui Stoilow, citind memoriul [32].

Sărbătorirea centenarului dizertației inaugurale a lui Riemann *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, prin conferința despre suprafețe riemanniene de la Princeton din decembrie 1951, care a întrunit 21 dintre cei mai mari specialiști din acest domeniu, va fi un nou prilej de afirmare a caracterului fundamental al contribuțiilor aduse de Stoilow la dezvoltarea teoriei geometrice a funcțiilor.

Conferința a fost deschisă de L. V. Ahlfors cu expunerea *Development of the Theory of Conformal mapping and Riemann surfaces through a century*, în volumul *Contributions to the Theory of Riemann surfaces*, eds. L. Ahlfors, E. Calabi, M. Morse, L. Sario, D. Spencer, Princeton Univ. Press, 1953, pp. 3—13. La p. 7 a acestei lucrări, sub titlul *Aspecte topologice*, Ahlfors scria: „Calea abstractă de tratare a suprafețelor riemanniene (i.e. metoda Weyl-Radó — s.n.) cu toate avantajele ei, tinde să neglijeze aspectul de suprafață de acoperire. Cu progresele făcute în topologie, noțiunile de grup fundamental și spațiu de acoperire universală deveniseră complet familiare și prin urmare cazul suprafețelor de acoperire netede (i.e. acoperiri local topologice sau neramificate —

s.n.) era bine prezentat în cartea lui Weyl. Stoilow a completat lacuna prin studierea suprafețelor de acoperire cu puncte de ramificare. Whyburn a întregit opera lui Stoilow și a bazat-o mai ferm pe topologie pură”.

Volumul include și alte mențiuni la teoria lui Stoilow, de exemplu în lucrările *Topological methods on Riemann surfaces. Pseudoharmonic functions* de J. A. Jenkins și M. Morse (pp. 111—139) și *Coverings of Riemann surfaces* de L. Fourès (pp. 141—155).

La mijlocul celui de al patrulea deceniu, teoria topologică a funcțiilor analitice construită de S. Stoilow constituia deja un ansamblu impresionant prin bogăția rezultatelor și importanța lor. La invitația celebrului matematician francez É. Borel, Stoilow alcătuiește acum opera sa de sinteză: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, professées à la Sorbonne et à l'Université de Cernauți* [39]. Ea apare în prestigioasa colecție de monografii de teoria funcțiilor a lui É. Borel în 1938.

Luind ca idee centrală problema lui Brouwer de caracterizare topologică a funcțiilor analitice, Stoilow prezintă în prefața monografiei (datată, iunie 1937) punctul său de vedere asupra acestei probleme. Prin introducerea transformărilor interioare se rezolvă „problema distribuției topologice a valorilor funcțiilor analitice pe suprafețele lor riemanniene”. Se ajunge la următoarea concluzie de ordin filosofic: „... considerații suficient de simple, de pură topologie, pot conduce în mod complet natural dacă nu chiar la noțiunea de funcție analitică (ceea ce ar fi imposibil, deoarece ea este o noțiune metrică) cel puțin la echivalentul topologic al funcțiilor analitice, adică la fundamentele topologice ale teoriei funcțiilor.

Pe de altă parte, continuă Stoilow, urmăresc să arăt cât mai intuitiv în ce măsură anumite rezultate fundamentale de teoria funcțiilor nu depind de caracterul metric al reprezentării conforme, realizate de aceste funcții. Între teoriile pur topologice prezentate aici și teoria clasică a funcțiilor analitice se află un șir întreg de ipoteze complementare, tot mai restrictive. Importanța acestor ipoteze și semnificația lor se poate aprecia după lucrările, care le sînt consacrate în cursul ultimilor ani. Mă mărginesc să numesc aici profunda teorie a lui Ahlfors a suprafețelor de acoperire și foarte

frumoasele rezultate ale lui M. A. Lavrentiev despre reprezentările cvasiconforme”.

Cine studiază această carte profund originală, care face epocă nu numai în teoria funcțiilor, dar și în topologie, rămîne uimit de bogăția și extraordinara varietate a rezultatelor, de măiestria cu care autorul trece de la intuiția concretă a faptelor geometrice la cele mai abstracte generalizări.

Primul capitol al monografiei este consacrat considerațiilor topologice auxiliare, care să permită definirea varietăților topologice și dezvoltarea riguroasă a teoriei. El cuprinde și teorema lui Brouwer de invarianță a mulțimilor deschise în raport cu homeomorfisme ale varietăților n -dimensionale. Teorema aceasta este stabilită în cazul general n -dimensional, nu numai pentru rolul ei fundamental în studiul transformărilor între varietăți, dar și pentru că ea permite să se întrevadă posibilitatea generalizării teoriei transformărilor interioare la un număr oarecare de dimensiuni. Această afirmație a lui Stoilow arată o dată mai mult cât de largi erau preocupările sale, programul său de viitor. În demonstrația teoremei lui Brouwer el folosește lema lui Lebesgue, pe care o expune după E. Sperner.

Capitolul al II-lea introduce suprafețele riemanniene de acoperire, pe care Stoilow le privește drept caz particular al noțiunii generale de spațiu de acoperire, conceput — putem spune — ca un triplet format din două spații topologice V și V_0 și o transformare continuă $f: V \rightarrow V_0$, și notat de el $(V_0)_f^V$. De fapt, Stoilow construia spațiul de acoperire ca mulțime a tuturor perechilor $[p, f(p)]$ pentru $p \in V$, pe care o organiza ca spațiu topologic homeomorf cu V , pe baza bijecției $p \rightarrow [p, f(p)]$. Acest spațiu și V nu diferă din punct de vedere topologic, dar pe lângă proprietatea de spațiu topologic, spațiul de acoperire este înzestrat și cu proiecția, care asociază fiecărui punct $[p, f(p)]$ punctul $f(p) = p_0 \in V_0$ și care, prin identificarea lui V cu spațiul de acoperire, coincide cu f . Astfel Stoilow este condus la o formulare echivalentă a definiției inițiale, și anume un spațiu de acoperire este „un spațiu topologic împreună cu o transformare continuă definită pe el”.

Să remarcăm că el definește apoi izomorfismul dintre spațiile de acoperire cu același spațiu de bază V_0 , exact așa

cum se face astăzi, în lumina teoriei categoriilor, în care după introducerea obiectelor se definesc morfismele.

Însemnătatea noțiunii de spațiu de acoperire definită aici de Stoilow, depășește cu mult teoria topologică a funcțiilor analitice. Într-adevăr, această noțiune este astăzi fundamentală în topologie și, prin diverse aplicații, în întreaga matematică contemporană. La răspîndirea acestei noțiuni un rol hotărîtor avea să-l joace opera lui C. Chevalley, care consacră § VI din cap. II, vol. I al tratatului său *Theory of Lie Groups* (Princeton Univ. Press, 1946) noțiunii de spațiu de acoperire și o folosește pentru o nouă definiție a simplei conexiuni. Chevalley a impus atît spațiilor topologice considerate de el, cît și proiecției, anumite condiții restrictive (*loc. cit.*, definiția 3, p. 140), care conduc în cazul particular al suprafețelor riemanniene la acoperirile neramificate și fără frontieră sau nelimitate. Cu notațiile de mai sus, el cere ca V să fie conex și local conex, iar orice punct $p_0 \in V_0$ să admită o vecinătate v_0 , astfel încît fiecare componentă conexă a lui $f^{-1}(v_0)$ să fie reprezentată homeomorf de f pe v_0 . Fără a cita pe Stoilow, Chevalley arată că f e homeomorfism local, deci transformare interioară.

Într-o notă publicată în memoriul *Simply connected spaces* („Fund. Math.”, 38 (1951), 179—303), în care aprofundează legătura dintre cele două concepte de simplă conexiune: cel definit cu ajutorul grupului fundamental al lui Poincaré și cel introdus de Chevalley, Tudor Ganea restabilește ordinea istorică scriind, după ce menționa că folosește definiția lui Chevalley: „Ideea de a defini un spațiu de acoperire ca o pereche formată de un spațiu topologic și o transformare interioară fusese deja exploatată de S. Stoilow în opera sa despre suprafețe riemanniene” și cita, de exemplu, lucrarea [36]. Dealtfel, o recunoaștere similară o aduce L. Fourès la Conferința de suprafețe riemanniene de la Princeton din 1951, cînd arată că folosește pentru acoperirile riemanniene definiții similare cu cele date de Stoilow [39] și Chevalley (în tratatul de teoria grupurilor Lie citat), iar mai departe, că acoperirea riemanniană a fost definită pentru prima dată de Stoilow (a se vedea p. 141 și p. 143 din volumul cuprinzînd lucrările Conferinței de la Princeton, citat mai sus).

Avem în legătură cu această problemă o mărturie autentică despre punctul de vedere al lui Stoilow însuși. Cu prile-

jul celui de al IV-lea Congres al matematicienilor români din 1956 de la București, au fost prezentate rapoarte generale ale comitetului de organizare privind principalele realizări obținute în țara noastră în ultimii 15 ani. În raportul asupra topologiei, care a fost alcătuit chiar de profesorul Stoilow, se subliniază că noțiunea de spațiu de acoperire a fost formulată *explicit* de el în monografia [39] (pp. 30—31, ed. I) și aplicată la definiția topologică a acoperirii riemanniene a unei varietăți 2-dimensionale de către o alta.

La Congresul de la Oslo, Stoilow definise acoperirea riemanniană prin condiția globală ca proiecția f (cu notațiile de mai sus) să fie o transformare interioară a unei varietăți topologice 2-dimensionale V într-o sferă sau o varietate topologică V_0 oarecare. Teorema sa de inversiune locală a transformărilor interioare îi permite însă să dea o definiție locală echivalentă, pe care preferă să o aleagă ca punct de plecare a prezentării teoriei sale din monografia [39], desigur, datorită caracterului ei mult mai intuitiv și mai apropiat de teoria clasică a suprafețelor riemanniene concrete, construite prin prelungirea unui element de funcție analitică. Prin acest mod de organizare al expunerii el va ajunge la definiția din [36] abia în capitolul al V-lea al cărții, după ce cititorul se familiarizează cu topologia suprafețelor riemanniene și cu proprietățile transformărilor interioare. Aceleași motive didactice fac ca definiția locală să fie astăzi general folosită în manuale. Să prezentăm însă acum această definiție, căreia Stoilow îi consacră prima secțiune a capitolului II.

Fie V și V_0 două varietăți topologice 2-dimensionale. Transformarea continuă $f: V \rightarrow V_0$ va defini o *acoperire riemanniană*, dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

I. Putem da pe varietatea V o familie cel mult numărabilă de domenii compacte $\{\delta_i\}$ ($i=1, 2, \dots$), astfel încît familia $\{\text{int } \delta_i\}$ să constituie o acoperire a lui V .

II. Pentru fiecare i există două homeomorfisme $h^i: \delta_i \rightarrow \{|\xi| \leq 1\}$ și $h_0^i: f(\delta_i) \rightarrow \{|\zeta| \leq 1\}$ ale domeniilor compacte δ_i și $f(\delta_i)$ pe cercuri unitate din planele complexe ale variabilelor ξ respectiv ζ , astfel încît transformarea $h_0^i \circ f \circ (h^i)^{-1}$ să se scrie $\zeta = \xi^{n_i}$, unde n_i este un întreg ≥ 1 , depinzînd de indicele i .

Dacă $n_i > 1$, punctul $[\alpha_i, f(\alpha_i)]$, unde $\alpha_i = (h^i)^{-1}(0)$, se numește punct de ramificare al acoperirii de ordin $n_i - 1$.

Să remarcăm că definiția lui Stoilow permite să se distingă foi și puncte de ramificare fără a folosi triangularea.

Luînd drept V_0 sfera lui Riemann, acoperirea este numită *suprafață riemanniană*. Prin transportarea metricii unghiulare de pe V_0 pe V cu ajutorul lui f , V se organizează ca o suprafață riemanniană în sensul lui Weyl. Pe suprafața riemanniană Stoilow definește funcțiile analitice, folosind reprezentări cu parametrii locali determinați de f . Conceptul de suprafață riemanniană de acoperire este exemplificat de suprafața riemanniană a unei funcții analitice. Se demonstrează apoi existența unei funcții analitice, care corespunde unei suprafețe riemanniene dată arbitrar, printr-o metodă elegantă bazată pe integrala lui Dirichlet și pe idei ale lui Courant și Fatou.

În capitolul al III-lea Stoilow prezintă, de data aceasta plecînd de la definiția locală, proprietățile topologice caracteristice suprafețelor riemanniene: triangulabilitatea și orientabilitatea. Exemple de suprafețe neorientabile și de varietăți netriangulabile (varietatea lui Prüfer) sporesc latura intuitivă a expunerii.

Urmează apoi în capitolul al IV-lea clasificarea topologică a suprafețelor riemanniene, după Jordan pentru cele compacte (denumite clasic închise) și după Kerékjártó pentru cele necompacte (deschise).

În acest ultim caz, Stoilow aduce alte noi rezultate de mare importanță pentru evoluția ulterioară a teoriei. El aprofundează noțiunea de „frontieră ideală”, care fusese introdusă de Kerékjártó în cartea sa de topologie, precizează noțiunea de „șir determinant” al unui „element” al frontierei ideale, de „șir de exhaustiune sau aproximare prin domenii poliedrice” a suprafeței deschise, și, definind convergența șirurilor de elemente frontieră, introduce o topologie pe mulțimea obținută completînd suprafața riemanniană cu elementele frontieră. Această frontieră ideală avea să joace un rol fundamental în cercetările moderne asupra clasificării suprafețelor riemanniene. Ea este astăzi unanim denumită „frontiera Kerékjártó-Stoilow”.

Capitolul se încheie prin demonstrarea teoremei de clasificare a lui Kerékjártó, într-o prezentare în care Stoilow folosește din nou rezultate proprii [35].

Teoria transformărilor interioare [17], [25] formează obiectul capitolului V, ale cărui concluzii cuprind celebrele sale

rezultate: definiția globală a suprafețelor riemanniene de acoperire [30], [32], [36] (și, evident, echivalența cu definiția locală din capitolul al II-lea), precum și caracterizarea topologică a funcțiilor analitice pe suprafețele lor riemanniene;

Oricare ar fi transformarea interioară T unei varietăți 2-dimensionale V în planul complex compactificat sau sfera lui Riemann, există un homeomorfism H al lui V pe o suprafață riemanniană R , care transformă T într-o funcție analitică $F = T \circ G^{-1}$, având suprafața riemanniană R .

În ultimul capitol, al VI-lea, Stoilow grupează aplicații la studiul topologic al funcțiilor analitice și al acoperirilor riemanniene, aplicații care aduc rezultate noi sau noi interpretări ale unor rezultate anterioare.

Prima temă tratată privește prelungirea continuă a transformărilor interioare. Stoilow demonstrează o importantă leamnă de prelungire similară cazului funcțiilor analitice:

Fie f o aplicație continuă a varietății 2-dimensionale V în varietatea 2-dimensională W și E o submulțime a lui V închisă și total discontinuă, astfel încît:

1° f este transformare interioară în $V \setminus E$.

2° Mulțimea $f(E) = E_1$ este total discontinuă.

În aceste condiții f este transformare interioară a lui V .

Demonstrația acestei leme este de cea simplă și elegantă clasice, caracteristică stilului matematic al profesorului Stoilow: Nici un continuu din V nu e transformat într-un punct. Trebuie verificat deci că f este transformare deschisă. În cazul contrar, ar exista în V un punct a și un domeniu compact δ , care conține a în interior și astfel încît $A = f(a)$ este punct frontieră pentru $f(\delta)$. Conform 1°, $A \in E_1$. Mulțimea $\mathcal{L} = f^{-1}(A)$ fiind închisă și total discontinuă, după ipotezele 1° și 2°, putem duce în δ curba jordaniană γ , astfel încît $\gamma \cap \mathcal{L} = \emptyset$, iar $a \in d$, domeniul interior curbei γ ; evident $A \in \text{fr } f(d)$. Deoarece $\text{fr } f(d)$ este un continuu, există un șir $p_n \in \text{fr } f(d) \setminus E_1$, care converge la A și un șir $p_n \in \bar{d} \setminus E$, pentru care $f(p_n) = \bar{p}_n$. Din ipoteza 1° rezultă $p_n \in \gamma$. Un punct limită α al șirului p_n are deci proprietățile $\alpha \in \gamma$ și $f(\alpha) = A$, ceea ce contrazice relația $\gamma \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

Primele aplicații ale acestei leme se găsesc tot în monografia lui Stoilow. Mai înainte de a trece la analiza lor să menționăm însă că el a stabilit și un alt criteriu de prelungire a transformărilor interioare, pentru a demonstra că transfor-

mările aproape analitice ale lui M.A. Lavrentiev sînt interioare [31]. În acest caz, f fiind o aplicație continuă $V \rightarrow W$ și interioară pe $V \setminus E$, mulțimea excepțională E se presupune închisă și numărabilă. Atunci, fără nici o ipoteză asupra lui $E_1 = f(E)$, rezultă printr-o demonstrație analogă cu cea de mai sus că f este interioară. O altă aplicație a acestei leme este cuprinsă în lucrarea [40].

Să revenim însă la aplicația dată de Stoilow lemei de prelungire în monografia sa, aplicație care se referă la funcțiile Pompeiu, acoperind în esență lucrarea [34] din 1936.

Existența atât de surprinzătoare a funcțiilor analitice uniforme, continue pe mulțimea singularităților lor, mulțime perfectă total discontinuă, descoperită de D. Pompeiu și publicată în nota *Sur les singularités de fonctions analytiques uniformes* („C. R. Acad. Sci. Paris”, 139 (1904), 914–915) și în celebra sa teză *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* („Ann. Fac. Sci. Toulouse”, 7 (1905), 264–315), deschisese un cîmp deosebit de interesant de cercetare prin noutatea și dificultatea problemelor ridicate de aceste funcții, denumite astăzi funcții Pompeiu.

Dimitrie Pompeiu arătase că aceste funcții sînt complet determinate de valorile luate pe mulțimea punctelor lor singulare („Rend. Circ. Mat. Palermo”, 29 (1910), 306–307). Propoziții mai precise fuseseră obținute de A. Denjoy (1909) și W. Fedoroff (1931). Cu ajutorul lemei de prelungire, Stoilow dă o demonstrație imediată următoarei teoreme, care include drept cazuri particulare aceste rezultate:

O funcție F continuă pe domeniul G din planul (z) și o-morfă pe $G \setminus E$, unde E este o mulțime perfectă total discontinuă, este complet determinată de valorile luate pe mulțimea E (i.e. dacă F este nulă pe E , atunci F este identic nulă în G).

În continuare, Stoilow reformulează, pe baza lemei de prelungire și a proprietăților transformărilor interioare, problema ridicată de Denjoy a existenței unei funcții Pompeiu univalente. Această problemă, pe atunci nerezolvată, cerea construirea unei funcții analitice uniforme pe $\mathbb{C} \setminus E$, cu mulțimea E a singularităților perfectă total discontinuă, și avînd proprietatea de a se prelungi la o funcție continuă bijectivă $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, care tinde la ∞ , cînd variabila z tinde la ∞ . Peste aproape 20 de ani, într-o altă strălucită teză, unul

dintre elevii profesorului Stoilow, Martin Jurchescu, va da acestei probleme o soluție extrem de simplă, bazată pe metode din memoriul lui L. V. Ahlfors și A. Beurling: *Conformal invariants and function-theoretic null-sets* („Acta Math.” 83, 1—2 (1950), 1—29), demonstrând existența homeomorfismelor Pompeiu sau a funcțiilor evasiliniare după terminologia din [34]. (A se vedea teza de doctorat a lui M. Jurchescu: *Suprafețe riemanniene cu frontiera absolut discontinuă* (1956) și lucrarea sa *Bordered Riemann surfaces* din „Math. Ann.”, 143, (1961), 264—292). Stoilow prezintă acest frumos rezultat al lui M. Jurchescu în expunerile ținute la Moscova în 1957 [62] și la Paris în 1960 [64].

Simion Stoilow a aprofundat cu deosebit interes opera lui Dimitrie Pompeiu, căruia i-a închinat pagini pline de admirație și afecțiune ([75], pp. 46—48). Lucrarea [34] nu este singura în care el continuă cercetările lui Pompeiu. În memoriul [44], ia ca punct de plecare o teoremă a lui Pompeiu din teza acestuia din 1905 subliniind că ea constituie prima extindere a teoremei lui Weierstrass despre singularitățile esențiale izolate, și urmărește legăturile ei cu proprietățile, pe care le demonstrase pentru clasa (I) în lucrarea [33]. Într-un articol publicat în revista „Studii și cercetări matematice”, 5, 1—2 (1954), 19—24, retipărit în [75], pp. 77—82, el analizează semnificația rezultatelor lui Pompeiu relative la singularitățile funcțiilor analitice uniforme și prezintă evoluția ulterioară a acestor rezultate, precum și posibilitățile largi de cercetare oferite de aprofundarea lor.

A doua temă a capitolului la VI-lea din [39] prezintă ciclul de lucrări [22], [23], [26], [27] și partea corespunzătoare din [25] din punctul de vedere al acoperirilor riemanniene: accentul nu mai cade acum asupra proprietăților transformării interioare ce realizează acoperirea, ci asupra proprietăților corespunzătoare ale acoperirii. În acest sens, Stoilow introduce două noi concepte importante: *acoperirea riemanniană totală*, pentru care, V și W fiind suprafețe triangulabile și orientabile, transformarea interioară $T: V \rightarrow W$ satisface condiția $(**)$ din [25], și *acoperirea riemanniană parțial regulată* $T: V \rightarrow W$, pentru care T îndeplinește condițiile (β_1) și (β_2) din [27]. Stoilow prezintă apoi rezultatele sale relative la teorema lui Hadamard, generalizarea formulei lui Hurwitz și generalizarea topologică a teoremei lui Alan-

der, denumită acum teorema lui Denjoy, deoarece ea coincide cu o consecință a unei teoreme generale stabilite de Denjoy în 1917.

Se remarcă în această schimbare de denumire importanța pe care Stoilow o acorda documentării, grija ca aceasta să fie cât mai completă și exactă. Pasiunea cu care urmărea ultimele noutăți sosite în bibliotecă a constituit un exemplu pentru generații de studenți. Această cunoaștere aprofundată a mișcării matematice internaționale se reflecta atît în cursurile și conferințele sale de ansamblu, cît și în propria sa creație. O privire asupra volumului *Oeuvre mathématique* arată că de multe ori, la interval foarte scurt după apariția vreunei lucrări ce avea contingentă cu preocupările lui, Stoilow intervenea cu rezultate legate de ea, fie rezolvînd probleme deschise, fie aruncînd o lumină nouă asupra faptelor matematice respective pe baza teoriei sale. Drept unele exemple izbitoare se pot cita lucrările [31], [37], [44].

Ultima temă a capitolului tratează despre valorile limită și valorile asimptotice pentru o suprafață riemanniană R de acoperire a sferei S după funcția analitică f . Pe lîngă o sinteză a lucrării [24], a părții corespunzătoare din [25] și a memoriului [33], menționăm și aici folosirea limbajului acoperirilor riemanniene: de exemplu, pentru acoperirile totale mulțimea valorilor limită $L = \emptyset$, iar pentru cele parțial regulate L coincide cu familia curbilor Γ din definiția acoperirii.

E. Szpilrajn și S. Kierst construiseră în lucrarea *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes* („Fund. Math.”, 21 (1933), 276—294) exemple, în care puncte din L sînt numai limită de valori asimptotice și nu valori asimptotice. Înlocuind pe baza teoremei de echivalență topologică, funcțiile analitice cu transformări interioare, Stoilow reușește să construiască ușor astfel de exemple.

În încheierea capitolului, el dă un rezultat al lui S. Kierst („Fund. Math.”, 27 (1936), 226—233), care arată cît de generală poate fi mulțimea valorilor asimptotice: Orice mulțime analitică în sensul lui Suslin și Luzin poate fi mulțime de valori asimptotice ale unei funcții meromorfe în cercul unitate.

Monografia lui Stoilow a contribuit în mod hotărîtor la dezvoltarea teoriei topologice a funcțiilor analitice, răspîndind pretutindeni ideile sale. Generații de matematicieni au studiat-o și folosit-o în cercetările lor de analiză sau topo-

logie. În 1956 apare o a doua ediție, completată cu o anexă cuprinzând lucrările [33], [44], [45] și [53], care erau strâns legate de ultimul capitol.

Cartea este tradusă în 1964 și în limba rusă [65]. În prefața la această traducere, B. V. Șabat subliniază importanța teoriei create de S. Stoilow. Se știe, scrie el, cât de mult a influențat hidrodinamica dezvoltarea teoriei funcțiilor analitice. Ultimile decenii au impus însă studiul mișcărilor la viteze atât de mari, încât a trebuit să se renunțe la condiția de incompresibilitate și deci la metodele clasice ale teoriei funcțiilor. A crescut astfel interesul față de generalizările funcțiilor analitice și mai ales față de cele care păstrau proprietățile topologice. Toate aceste generalizări rămân însă în clasa transformărilor interioare ale lui Stoilow. Această clasă este deci extrem de importantă nu numai din punct de vedere teoretic, dar și din punct de vedere practic.

B. V. Șabat încheie această prefață cu o emoționantă evocare: „Stoilow a fost nu numai un matematician remarcabil, dar și un om cu suflet mare și cu un deosebit farmec personal. Fie ca această carte să amintească cititorului imaginea luminoasă a autorului ei!”

Apariția cărții [39] nu întrerupe firul creației lui Stoilow. Dimpotrivă, cercetările lui sînt continuate cu mai multă generalitate și măiestrie, rod al muncii de sistematizare și fundamentare a teoriei întreprinse cu prilejul scrierii acestei monografii.

Ideea dominantă în opera sa din această perioadă constă în *construirea unei clasificări a acoperirilor riemanniene*, așa după cum problema clasificării suprafețelor riemanniene în sensul Weyl-Radó ocupă un loc central în teoria acestor suprafețe. Cu perspectiva dezvoltărilor ulterioare, Stoilow însuși avea să prezinte de mai multe ori această tematică în conferințe și expuneri de ansamblu: [57], [59], [61] sau în *Exposé sommaire de mon travail de recherche* [75], pct. 5, pp. 29–30.

În memoriul [57] el scrie: „Problema clasificării suprafețelor riemanniene s-a pus de la introducerea lor în teoria funcțiilor, dar această problemă nu a dobîndit întreaga ei importanță decît din momentul în care conceptul lui Riemann a putut fi definit cu toată vigoarea și în toată generalitatea, pe care o comportă ... În cele ce urmează, îmi propun să arăt

cum se poate — grație unor rezultate ale căror demonstrații au fost publicate în diverse alte lucrări — degaja din această definiție — este vorba de definiția pe care el a dat-o acoperirilor riemanniene — criterii topologice pentru clasificarea acoperirilor riemanniene”.

Problema revine ca un leit-motiv în ciclul de conferințe pe care Stoilow îl ține în 1957 la Roma [59] și este reluată în conferința prezentată de el la Colocviul de teoria funcțiilor din același an de la Helsinki [61], din care cităm: „Îmi propun să arăt aici cum, alături de studiul diverselor clase de suprafețe riemanniene abstracte, este loc pentru un fel de clasificare, paralelă cu acest studiu, dar care ia ca bază definiția topologică a acoperirilor riemanniene”.

În cadrul acestei vaste probleme, Stoilow a introdus două clase de acoperiri riemanniene remarcabile atât prin proprietățile lor cît și prin importante exemple pe care le includ: *acoperirile riemanniene normal exhaustibile* și *acoperirile riemanniene de clasă (I)*.

În a doua parte a anilor treizeci, nu se putea vorbi desigur de teoria clasificării suprafețelor riemanniene deschise în general, studiul acestor suprafețe fiind abia la început; dar deja celebra problemă a tipului hiperbolic sau parabolic (care cerea să se distingă în cazul suprafețelor riemanniene deschise simplu conexe cele conform echivalente cu cercul unitate respectiv cu planul complex) era în centrul atenției cercetătorilor. (A se vedea de exemplu monografia lui R. Nevanlinna *Enideutige analytische Funktionen* din 1936.) Existau evidențiate și unele clase de suprafețe riemanniene de acoperire caracterizate prin diferite proprietăți de ramificare sau clasa acoperirilor regulat exhaustibile, ce fusese recent introdusă de Ahlfors în memoriul *Zur Theorie der Überlagerungsflächen* din 1935 (citată mai sus la p. 57), căruia Stoilow avea să-i consacre unul dintre cursurile sale speciale (a se vedea și [72], cap. X).

La Congresul internațional de la Oslo, Ahlfors însuși relevase importanța clasificării acoperirilor riemanniene (după cum reiese și din citatul de la p. 84 de mai sus).

În acest cadru istoric definește Stoilow clasa acoperirilor normal exhaustibile. După metoda sa de lucru, el introduce clasa și prezintă proprietățile ei în nota [37] din „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris” în 1938, iar

expunerea cu toate demonstrațiile apare în memoriu [42] din 1940. Așa cum scrie el însuși, această clasă se impune în mod natural atunci când se caută suprafețele de acoperire necompacte (deschise) cele mai apropiate de suprafețele compacte (închise) [59], [61]. Totodată ea apare ca un corespondent topologic al clasei de acoperiri riemanniene regulat exhaustibile, pe care Ahlfors o introdusese folosind o condiție metrică, ceea ce se reflectă și în titlul notei [37].

Se știe că o suprafață riemanniană $R=(S)_f^V$, unde S este sfera lui Riemann, este o acoperire totală, dacă V e suprafață compactă. Aplicația inversă f^{-1} , în general multiformă, este complet continuă: oricare ar fi punctul $P_0 \in S$ și un șir $P_n \in S$, și convergent la P_0 , și oricare ar fi $p_0 \in f^{-1}(P_0)$ există un șir $p_n \in f^{-1}(P_n)$, care tinde la p_0 (cu alte cuvinte, f este o involuție topologică în sensul lui Brouwer (1919)).

Aceste proprietăți nu mai au în genere loc pentru o suprafață V necompactă. Dacă însă D este un domeniu compact din V , avem următoarele afirmații echivalente: D domeniu normal $\Leftrightarrow f|_D : D \rightarrow f(D)$ este transformare interioară $\Leftrightarrow f|_D : D \rightarrow f(D)$ are inversa f^{-1} complet continuă. Acoperirea $(\text{int } f(D))_f^{\text{int } D}$ este în acest caz totală.

Combinând aceste fapte cu metoda naturală de a studia suprafețele necompacte pe baza unui șir de aproximare sau exhaustiune format din domenii poliedrice, Stoilow numește o suprafață riemanniană deschisă $(S)_f^V$ *normal exhaustibilă*, dacă există un șir de domenii poliedrice $D_i \subset V$, $i=1, 2, \dots$, cu proprietățile:

1° $D_i \subset \text{int } D_{i+1}$,

2° $\bigcup_i D_i = V$ și

3° D_i este domeniu normal pentru f .

Definiția se extinde evident la acoperiri riemanniene.

Acoperirile regulat exhaustibile ale lui L. V. Ahlfors satisfacau condițiile 1° și 2°, dar condiția pur topologică 3° era înlocuită printr-o condiție metrică. Cele două clase de acoperiri se intersectează fără ca una dintre ele să includă pe cealaltă.

Sînt studiate apoi suprafețele riemanniene $R=(S)_f^V$ normal exhaustibile simplu conexe, care sînt denumite de specia întâi, respectiv a doua, după cum mulțimea lacunară $S \setminus \sqrt{f(V)}$

este un punct sau un continuu. Ambele specii cuprind exemple remarcabile. Astfel, funcțiile întregi f de ordin $< \frac{1}{2}$

generează (după o cunoscută teoremă a lui Wiman) acoperiri de specia întâi și de tip parabolic deoarece $V=\mathbb{C}$, în timp ce funcția Luzin-Privalov $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n! a^{2n}}$, a întreg ≥ 5 , $V=\{z: |z| < 1\}$ generează o acoperire de specia întâi și de tip hiperbolic.

Cu ajutorul funcției caracteristice a lui R. Nevanlinna, Stoilow formulează un criteriu necesar și suficient de apartenență la una din cele două specii. El demonstrează că suprafețele riemanniene simplu conexe normal exhaustibile sînt regulat exhaustibile, atunci și numai atunci cînd sînt de specia întâi.

Una dintre proprietățile importante ale acoperirilor normal exhaustibile este faptul că teoreme cu caracter topologic de repartiția (distribuția) valorilor se simplifică în acest caz. Astfel cu ajutorul formulei lui Hurwitz aplicabilă în fiecare etapă i de exhaustiune, Stoilow obține pentru suprafețe riemanniene de acoperire simplu conexe normal exhaustibile teorema discurilor într-o formă mai precisă decît în cazul suprafețelor regulat exhaustibile ale lui Ahlfors. De exemplu, teorema discurilor a lui Ahlfors afirma că pentru o suprafață riemanniană generată de o funcție f întreagă $R=(\mathbb{C})_f^{\mathbb{C}}$, date trei domenii jordanene disjuncte în $\mathbb{C}$, cel puțin unul este acoperit de R cu o foaie simplă, în timp ce teorema lui Stoilow precizează că pentru R normal exhaustibilă din două domenii jordanene disjuncte din $\mathbb{C}$, cel puțin unul este acoperit de R cu o foaie simplă (mai mult chiar cu o infinitate de foi simple, dacă R are o infinitate de foi). Din teorema sa a discurilor Stoilow deduce că o suprafață riemanniană simplu conexă normal exhaustibilă poate avea cel mult un punct complet ramificat, adică un punct pe sfera de bază a cărui preimagine să conțină numai puncte multiple.

În ciclul de lecții ținute la Roma în 1957 [59] Stoilow va face o expunere a exhaustibilității normale adăugînd și un rezultat nou la cele de mai sus, și anume un criteriu de tip parabolic. Totodată, el va prezenta și teorema discurilor pentru acoperiri riemanniene normal exhaustibile generale, stabi-

lită de Cabiria Andreian Cazacu („Bul. științ., Acad. R.P.R., sect. mat.-fiz., 6, 2 (1952), 263—272 și „Math. Nachr.”, 15, 2 (1956), 77—86).

A doua clasă de acoperiri riemanniene introdusă de Stoilow este clasa (I) sau Iversen, pe care Stoilow o consideră mai importantă, fiind o clasă largă, care cuprinde suprafețele riemanniene corespunzătoare unui mare număr de categorii de funcții analitice remarcabile.

Se știe că Stoilow a stabilit legături cu teza lui Iversen încă în memoriul său fundamental din 1928 [17]. Supunând această teză unei profunde analize, el a remarcat caracterul pur topologic al proprietății de prelungire analitică, pe care după teorema lui Iversen o aveau inversele funcțiilor meromorfe în plan, și a intuit rolul fundamental al acestei proprietăți în studiul valorilor asimptotice și al valorilor excepționale Picard. Procedind axiomatic, el a abstras această proprietate din contextul concret în care se afla și, denuind-o proprietatea Iversen sau (I), a trecut la studierea clasei de funcții analitice corespunzătoare. E drept, în lucrările [24] și [25], Stoilow consideră numai funcții analitice uniforme respectiv transformări interioare pe domenii din sferă, dar chiar nota [24] cuprinde formulate clar proprietățile de bază, pe care le va extinde și preciza mai târziu, aprofundarea consecințelor proprietății (I) rămânând una din principalele sale preocupări.

Succesiunea de lucrări [33], [44], [45], [46], [50], [52], [57], [59], [60], [61] consacrate acestui subiect ne permite să urmărim felul în care au evoluat ideile lui Stoilow și s-a construit teoria clasei (I). Se evidențiază acum din nou o trăsătură specifică, tendința lui Stoilow de perfecționare chiar în ceea ce privește terminologia sau notațiile. Începând cu lucrarea [33], Stoilow va numi funcții Iversen sau (I), funcțiile analitice care au proprietatea (I) de prelungire analitică posibilă pe drumuri oricât de vecine cu un drum dat (deci inversele celor care în [24] erau numite de clasă (I)) și va studia inverse de funcții (I), pentru care exemplul clasic este dat de funcțiile meromorfe în plan.

Ca și multe alte lucrări ale lui Stoilow, memoriul [33] ia ca punct de plecare o cercetare anterioară. Este vorba aici de memoriul lui G. Julia: *Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière* $G(x, y) = 0$,

(„Bull. Soc. Math. France”, 54 (1926), 26—37). Stoilow dezvăluie esența rezultatelor lui Julia, arătând că ele decurg din faptul că funcțiile respective sînt inverse de funcții (I) și apoi din proprietățile generale, pe care le demonstrează pentru inversele de funcții (I).

Spre deosebire de lucrările [24] și [25], Stoilow consideră acum funcții analitice multiforme și deci suprafețele lor riemanniene. După cum pentru funcțiile (I) uniforme domeniul de existență din planul complex avea frontiera total discontinuă, el introduce pentru suprafețele riemanniene ale funcțiilor (I) multiforme denumirea sugestivă de suprafețe riemanniene cu frontiera total discontinuă.

Memoriul [33] cuprinde două părți. În prima parte se demonstrează că funcțiile algebroide generalizate și funcțiile analitice definite de o relație întreagă ireductibilă $G(z, w) = 0$ sînt funcții (I). (O funcție $z(w)$ se numește algebroidă generalizată, dacă satisface o relație

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n A_k(w)z^k = 0,$$

unde A_k sînt funcții (I) uniforme). Partea a doua studiază inversa $w=f(z)$ a unei funcții (I) oarecare $z=\varphi(w)$, $\varphi=f^{-1}$, în genere ambele funcții f și φ fiind multiforme.

Fie R_f suprafața riemanniană a funcției analitice f , care este formată din elementele acestei funcții ca puncte și acoperă sfera lui Riemann (z) după proiecția T . Funcția analitică $w=f(z)$ determină o aplicație uniformă $w=F(p)$, unde $p \in R_f$, deci p constă din un element al funcției analitice f , $z=T(p)$ fiind centrul acestui element, iar $w=F(p)$ valoarea seriei respective în centrul z . Fie L mulțimea valorilor limită a funcției F pentru diferite șiruri p_n din R_f , $p_n \rightarrow \text{fr } R_f$.

În aceste condiții se pot prezenta următoarele două cazuri (generalizare a rezultatelor din [24]):

1° $L=(w)$, i.e. orice valoare din sfera lui Riemann (w) este valoare limită a suprafeței riemanniene R_f , deci teorema lui Weierstrass de completă nedeterminare a unei funcții analitice uniforme în vecinătatea unui punct singular esențial izolat funcționează pentru întreaga $\text{fr } R_f$ considerată global.

2° L este o mulțime închisă total discontinuă și $z=\varphi(w)$ este algebroidă generalizată, soluție a unei relații (4), în care funcțiile

A_k au singularități (nepolare) numai în L . Orice valoare $w \in L$ este luată de $w=f(z)$ de n ori, iar orice valoare $w \in L$ de $\leq (n-1)$ ori.

Dacă funcțiile $w=f(z)$ generalizează în cazul 1° funcțiile meromorfe din plan, algebroidele generalizate constituie un corespondent al funcțiilor raționale.

Apoi Stoilow se reîntoarce la funcțiile definite de relația $G(z, w)=0$, pentru care în cazul 1° analogia cu funcțiile meromorfe poate fi adâncită: valorile limită pot fi considerate acum nu relativ la fr R_f , ci relativ la ∞ în sensul următor:

Dacă $w \in L$ este o valoare luată de o infinitate de ori de F , există $p_n \in R_f$, $p_n \rightarrow \text{fr } R_f$ cu $F(p_n) \rightarrow w$ și $T(p_n) \rightarrow \infty$.

Dacă $w \in L$ este luată de un număr finit de ori, w este o valoare asimptotică, și anume pentru un drum de determinare tinzând la fr R_f care se proiectează prin T după un drum tinzând la $z=\infty$.

Tot în cazul 1° , Stoilow demonstrează că mulțimea E_n a valorilor luate de $\leq n$ ori este închisă și total discontinuă, regăsind astfel pentru $n=0$ rezultatul lui Julia din lucrarea citată mai sus, dar cu justificarea sa adîncă de consecință a proprietății (I). Totodată Stoilow deduce structura mulțimii E a valorilor excepționale Picard, ea fiind cel mult o sumă numărabilă de mulțimi închise total discontinue, deoarece $E = \bigcup_n E_n$. Apoi construiește un exemplu pentru care E este o mulțime densă în plan, reuniune numărabilă de mulțimi perfecte discontinue.

Odată cu memoriul [44], Stoilow inițiază un nou tip de cercetare: dată o clasă de suprafețe riemanniene abstracte, în ce măsură se poate afirma că realizările acestor suprafețe ca acoperiri riemanniene au toate o anumită proprietate, în cazul de față proprietatea (I). Într-adevăr, el demonstrează că: orice funcție analitică, a cărei suprafață riemanniană are frontiera de măsură armonică nulă, este inversă de funcție (I), prin urmare, conform [33], sau

1° satisface teorema de tip Weierstrass pentru frontiera suprafeței ei riemanniene sau

2° este inversă de algebroidă generalizată.

Pentru a ne da seama de însemnătatea deosebită a memoriului [44] să observăm că în anii treizeci prin opera lui

L. V. Ahlfors, P. J. Myrberg și R. Nevanlinna se detașase din problema tipului conform al suprafețelor riemanniene simplu conexe problema generală a clasificării suprafețelor riemanniene abstracte (Weyl-Radó) deschise și că se definise o clasă remarcabilă prin proprietățile ei, care generaliza tipul conform al planului complex (tipul parabolic). Este vorba de clasa O_G , pentru care se cunoșteau mai multe caracterizări echivalente, una dintre ele fiind inexistența funcției Green (de unde și notația O_G). O altă caracterizare consta în anularea măsurii armonice a frontierei ideale a suprafeței, măsură conform invariantă, aprofundată prin lucrările lui R. Nevanlinna. În memoriul *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* („Ann. Acad. Sci. Fenn.”, Ser. A I Math., 1 (1941)) R. Nevanlinna extinde teoria integralelor abeliene de la cazul clasic al suprafețelor riemanniene compacte la cazul suprafețelor riemanniene cu frontiera de măsură armonică nulă, realizînd o etapă importantă în dezvoltarea teoriei funcțiilor pe suprafețe riemanniene necompacte. Suprafețele riemanniene cu frontiera de măsură armonică nulă erau în centrul atenției specialiștilor, ceea ce justifică răsunetul imediat al memoriului [44]. Pe de altă parte, așa după cum am subliniat deja, el aducea o problemă nouă, ce va fi extinsă la clase tot mai largi de suprafețe riemanniene, în decada următoare [57], [59], [61].

Memoriul [44] conține însă și alte rezultate deschizătoare de drumuri. Credincios crezului său științific de continuitate a cercetării matematice, Stoilow ancorează și acum preocupările sale în solul ferm al matematicii clasice, și anume extinde teorema lui Pompeiu din 1905 (regăsită de Bésicovitch în 1930): O funcție f meromorfă în $D \setminus E$, unde D este un domeniu din plan, iar E este mulțimea singularităților nepolare ale lui f și are măsura liniară nulă, se apropie oricît de mult de orice valoare dată, în vecinătatea oricărui punct din E .

În scopul obținerii unui rezultat corespunzător pe suprafețe riemanniene, Stoilow înlocuiește măsura liniară a mulțimii E cu măsura armonică a frontierei suprafeței, iar punctele din E cu elementele frontiere. Apare astfel o temă nouă: studiul comportării funcțiilor analitice în vecinătatea elementelor frontiere. Această temă avea să joace ulterior un rol central, începînd cu lucrările lui L. Sario *Über Riemannsche*

Flächen mit hebbarem Rand („Ann. Acad. Sci. Fenn.“, Ser. A I Math., 50 (1948)), *Capacity of the boundary and of a boundary component* („Ann. of Math.“, (2) 59 (1954), 135–144) și altele, lucrări care constituie un moment hotărîtor în evoluția teoriei suprafețelor riemanniene deschise.

În memoriul [44] se definește și noțiunea de *punct singular al unei suprafețe riemanniene* $R=(z)_T^V$ sau al oricărei funcții analitice f avînd R drept suprafață riemanniană a ei.

Pentru fiecare element frontieră α a lui R , Stoilow numește vecinătate a lui α un domeniu Δ dintr-un șir determinant arbitrar al lui α și folosește notația $\alpha \in \Delta$. El definește $L(\Delta)$ ca fiind mulțimea valorilor limită ale șirurilor $F(p_n)$ pentru orice șir $p_n \in V$, $p_n \rightarrow \alpha$ și orice $\alpha \in \Delta$. Punctul z_0 din sfera lui Riemann va fi singular pentru R sau f , dacă este valoare asimptotică pentru T relativă la un drum λ de pe V , care tinde la α . În acest mod punctele singulare (care corespund conceptului clasic din teoria prelungirii analitice) sînt asociate diferitelor elemente frontieră, asocierea nefiind nici surjectivă, nici injectivă. Punctul singular z_0 este numit de Stoilow transcendent ordinar, preluînd terminologia profesorului său Painlevé, dacă oricare ar fi drumul $\lambda \rightarrow z_0$, $T(\lambda) \rightarrow z_0$.

Cu aceste definiții, Stoilow demonstrează următoarea teoremă, care apare ca o relativizare a teoremei sale anterioare față de elementele frontieră.

Fie f o funcție analitică cu suprafața riemanniană R_f , avînd frontiera de măsură armonică nulă. Pentru orice vecinătate Δ a unui element frontieră α a lui R_f se poate prezenta numai unul din următoarele două cazuri:

1° $L(\Delta)$ coincide cu sfera lui Riemann, deci f se apropie în Δ de orice valoare arbitrar dată, comportare de tipul celei indicate de teorema lui Weierstrass în extinderea Pompeiu-Bélicovitch sau

2° $L(\Delta)$ este o mulțime total discontinuă și Δ conține numai elemente frontieră cu puncte singulare transcendente ordinare pentru f .

Dacă restricția lui T la Δ este injectivă, f este uniformă în $T(\Delta)$ din care extragem mulțimea singularităților, de măsură armonică nulă, deci de măsură liniară nulă, și Δ corespunde cazului 1°.

Dacă oricare ar fi vecinătatea Δ sîntem în cazul 2°, f este inversă de algebroidă generalizată.

Finalul memoriului este foarte dens: fiecare frază punctează idei, rezultate, probleme. De menționat extinderea la cazul multiform al unor rezultate ale lui R. Nevanlinna și ale matematicienei engleze Mary Cartwright relative la valori lacunare și valori asimptotice.

Bogăția de concepte introduse de Stoilow în acest memoriu se cerea fructificată. Într-adevăr, în lucrarea [45] și la Congresul al VI-lea al matematicienilor polonezi din 1948 de la Varșovia [50], el adîncește noțiunea de punct singular al funcțiilor corespunzătoare unei suprafețe riemanniene, iar în lucrările [46] și [53] clasifică elementele frontieră.

Nota [46], cuprinzînd rezultate expuse de Stoilow într-o serie de conferințe ținute la Facultatea de științe din Paris în mai 1947, trata cazul funcțiilor analitice, care, atît ele cît și inversele lor, sînt funcții (I). Funcțiile ce corespund la o suprafață riemanniană cu frontiera de măsură armonică nulă [44], și cele definite de o relație întreagă $G(z,w)=0$ [33], constituie exemple de acest fel. În ambele cazuri, dacă suprafețele riemanniene corespunzătoare atît funcției cît și inversei ei nu au elemente frontieră α total etalate (adică, cu notațiile de mai sus, pentru care $\bigcap_{\Delta \ni \alpha} L(\Delta)$ să coincidă cu

întreaga sferă a lui Riemann), atunci funcțiile sînt algebrice și suprafețele riemanniene sînt compacte. Un important caz particular îl constituie teorema lui T. Shimizu despre funcții de automorfie ale unei funcții meromorfe („Japan J. Math.“, 8 (1931), 237–304).

O lume întreagă de idei este chemată la viață de nota [53], care cuprinde *principiul lui Stoilow* din teoria clasificării suprafețelor riemanniene. Faptul că o funcție analitică are proprietatea (I) observă el, depinde exclusiv de structura suprafeței riemanniene a acestei funcții. Reluînd punctul de vedere din [25], Stoilow numește suprafața riemanniană $R=(z)_T^V$ de clasă (I), dacă oricare ar fi drumul Σ cu originea A și extremitatea B de pe sfera (z) și oricare ar fi punctul $a \in T^{-1}(A)$, există drumul σ din V cu originea a și extremitatea b , pentru care $T(\sigma)$ este cuprins într-o vecinătate arbitrar dată a lui Σ și $T(b)$ într-o vecinătate arbitrară a lui B . Funcțiile corespunzătoare lui R sînt numite

acum funcții cu proprietatea (I). Mai mult conceptele sînt extinse, înlocuind sfera (z) cu o suprafață riemanniană oarecare R_0 .

Stoilow introduce apoi clasificarea elementelor frontieră a lui R pe baza modului de acoperire. Fie α un astfel de element și Δ_n un șir determinant al său. După cum $\bigcap_n T(\Delta_n)$ este mulțimea vidă, un punct, toată suprafața de bază R_0 respectiv o submulțime proprie a lui R_0 diferită de un punct, elementul α se numește *exterior* lui R_0 (acest caz nu poate apărea pentru R_0 compact), *punctual*, *total*, respectiv *parțial etalat*.

Principiul lui Stoilow, consecință a teoremei din [44], afirmă că *pentru R de clasă (I) pe R_0 sau*

1° *Există cel puțin un element frontieră al lui R total etalat pe R_0 , celelalte nefiind parțial etalate, iar R avînd o infinitate de foi,*
sau

2° *Toate elementele frontieră ale lui R sînt punctuale respectiv exterioare lui R_0 , iar R are un număr finit de foi peste R_0 .*

Principiul se traduce corespunzător pentru funcții.

Nota [53] se încheie cu o extindere, și anume, fiind dată o acoperire riemanniană R oarecare, Stoilow cercetează acum domeniile din suprafața de bază, pe care R sau o parte din R are proprietatea (I).

În expunerile de sinteză legate de clasificarea suprafețelor și acoperirilor riemanniene din anii cincizeci [57], [59]—[61], Stoilow consacră un loc de seamă clasei (I). Sînt prezentate noile rezultate obținute în această direcție de elevii săi, în special de M. Jurchescu, și de alți matematicieni. Se analizează în lumina acestor rezultate legătura dintre clasa (I) și alte clase de suprafețe riemanniene abstracte.

Să remarcăm și o reformulare a definiției clasei (I) în conferința sa de la Helsinki [61]: O acoperire $(W)_f^y$ se numește de clasă (I), dacă oricare ar fi domeniul Δ din W și componenta conexă δ a lui $f^{-1}(\Delta)$ pe V , mulțimea $\Delta/f(\delta)$ nu conține nici un continuu. Să observăm de asemenea că fiecare componentă δ este o regiune maximă a lui Δ (i.e. interiorul unui domeniul maxim al lui Δ).

Este interesant faptul că și clasa acoperirilor normal exhaustibile poate fi caracterizată în termeni de domenii

maxime: Condiția necesară și suficientă ca o acoperire riemanniană să fie normal exhaustibilă este ca domeniile maxime ale oricărui domeniu compact din $f(V)$ să fie compacte în V , adică să fie domenii normale.

Pentru cel ce studiază opera profesorului Stoilow este evidentă preocuparea sa de a desprinde din multitudinea faptelor concrete acele principii călăuzitoare, care să permită sistematizări dintr-un punct de vedere unitar. Este impresionantă grija cu care el prezenta ideile esențiale, cu care reliefa cauzele, justifica introducerea unei noțiuni, dezvoltarea unei teorii. În acest sens, sînt grăitoare pasaje în care teoretizează clasificarea suprafețelor riemanniene în lucrările [57], [59] sau [61].

Desprindem, din aceste analize filosofice ale științei noastre, simțul estetic și convingerea existenței unei armonii lăuntrice a disciplinelor matematice. Intuirea acestei armonii îi prilejuia lui Stoilow posibilitatea previziunilor științifice, care sub acțiunea genului său creator s-au dovedit nu odată extrem de fecunde.

Iată de pildă, în clasificarea suprafețelor riemanniene în sensul Weyl-Radó, inexistența anumitor tipuri de funcții este folosită ca idee centrală pentru definirea unor clase de suprafețe. Rădăcinile acestui procedeu se găsesc în teorema clasică a lui Liouville, care afirmă că nu există în plan funcții olomorfe (întregi) mărginite. Plecînd de la aceste observații, Stoilow urmărește să descopere principiul unificator în clasificarea acoperirilor riemanniene, principiu pe care îl deduce din teorema lui Weierstrass mereu menționată mai sus. „A căuta, serie el în [61], suprafețele riemanniene abstracte cu toate realizările de clasă (I), înseamnă deci a caracteriza o categorie de astfel de suprafețe plecînd de la teorema lui Weierstrass, exact așa cum se face de obicei (clasele O_{HB} , O_{AB} , O_{HD} , O_{AD}) plecînd de la teorema lui Liouville și de la teoreme înrudite”.

Un alt exemplu este alternativa: metric-topologic, care revine și ea ades în lucrările profesorului. De exemplu, de cite ori demonstrează că anumite mulțimi sînt de categoria întâi a lui Baire, el amintește că aceste mulțimi joacă în topologie rolul mulțimilor nule din teoriile metrice. Ideea descoperirii analogului topologic al unei proprietăți metrice străbate dealtfel ca un fir roșu întreaga sa operă.

Sîntem încă departe de a epuiza lista lucrărilor lui Stoilow dedicate analizei complexe și topologiei. Ciclul, de care ne vom ocupa pe scurt acum, se încadrează în programul său de aprofundare a transformărilor interioare într-un cadru cît mai general.

În 1940, Stoilow publică o extindere topologică a principiului minimului modului funcțiilor analitice, formulată pentru o transformare continuă și deschisă $T: X \rightarrow Y$, X și Y fiind spații topologice și urmată de un corolar în cazul spațiilor euclidiene, din care deduce o proprietate remarcabilă a funcției Luzin-Privalov (a se vedea p. 97): pentru această funcție orice dreaptă prin origine este o dreaptă Julia [41].

Profunde cercetări de topologie sînt conținute și în memoriul [43] din același an, care ilustrează stăpînirea de către Stoilow a celor mai recente rezultate, legate de studiul transformărilor continue, al transformărilor deschise sau 0-dimensionale, aparținînd unor G. T. Whyburn, A. D. Wallace, P. S. Alexandrov, C. Kuratowski, studiu care se dezvoltă pe atunci plecînd chiar de la descoperirile sale. Astfel, el demonstrează că o transformare continuă $f: X \rightarrow Y$, unde X este un spațiu metric, separabil, local compact, iar Y un spațiu complet, este transformare deschisă a unei submulțimi $A \subset X$ pe o submulțime $B \subset Y$, A și B fiind ambele submulțimi G_δ în X respectiv Y . Din acest rezultat general va deduce, în ipoteza că X și Y sînt varietăți n -dimensionale și f este 0-dimensională, că A și B sînt mulțimi reziduale (Denjoy) în X respectiv Y (i.e. că mulțimile $X \setminus A$ și $Y \setminus B$ sînt de prima categorie). Adăugînd condiția ca f să fie aproape peste tot numărabilă (i.e. fibrele $f^{-1}(y)$ să fie numărabile pentru orice $y \in Y$, exceptînd o mulțime de prima categorie) va obține existența în orice deschis din X a unui G_δ , pe care f să fie topologică și a cărui imagine să difere de un deschis prin o mulțime de prima categorie. Regăsim în finețea raționamentelor acestui memoriu pe maestrul teoriei mulțimilor și continuității. Conceptul folosit aici de transformare nesesingulară (f este nesesingulară în mulțimea deschisă $D \subset X$, dacă oricare ar fi submulțimea deschisă $d \subset D$, mulțimea $f(d)$ include un deschis din Y) amintește, desigur, nu numai terminologic, conceptul de punct singular din [14].

Conferința ținută în august 1950 la Budapesta, în cadrul primului Congres al matematicienilor maghiari [49], studiază transformările interioare $f: X \rightarrow Y$ între două varietăți 3-dimensionale X și Y . Asupra acestei lucrări, care prin tematica ei și rezultatele cuprinse a avut un răsunet deosebit atît în cercetările de topologie cît și de teoria aplicațiilor evasi-regulate (în această ultimă direcție, mai tîrziu, în deceniul al șaptelea) vom mai reveni.

Lucrările [47], [48], [51], [54] se încadrează în preocupările de sinteză între algebră (teoria grupurilor), topologie și analiză (teoria funcțiilor analitice), de amplă rezonanță filosofică ale profesorului Stoilow. Cititorul descoperă în aceste lucrări o înțelegere adîncă a fenomenelor matematice și urmărește cu uimire un adevărat „joc secund” al analogiilor și intuiției.

În afară de conferințele ținute pe tema clasificării acoperirilor riemanniene, Stoilow prezintă, la Consfătuirea de geometrie diferențială de la Timișoara din 1955, o expunere consacrată folosirii metodelor geometriei diferențiale în studiul suprafețelor riemanniene (rolul metricii liniare în problema tipului, aplicații ale curbării totale, metrica hiperbolică) [55], iar la Consfătuirea de geometrie și topologie de la Iași din 1958, o discuție cuprinzînd probleme profunde, și astăzi nerezolvate, despre valorile asimptotice și valorile deficiente. Teoria reprezentărilor evasiconforme și legăturile ei cu transformările interioare formează obiectul conferinței din 1956 de la cel de al IV-lea Congres al matematicienilor români din București [58] și al conferinței ținute la Paris în mai 1960, [64]. Suprafețelor neorientabile și acoperirilor lor le sînt dedicate pasaje din expunerea pe care a ținut-o la Helsinki [61], precum și în aceea prezentată la al V-lea Congres al matematicienilor austrieci de la Innsbruck în toamna 1960 [66].

O altă realizare de valoare a acestor ani o constituie tratatul în două volume: *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, rod al experienței sale didactice de mai multe decenii [71], [72].

Volumul I (1954) redă într-o organizare originală principiile fundamentale ale acestei discipline. Deși volumul tratează fundamentele teoriei, forma de prezentare a acestor fundamente este menită să deschidă orizonturi spre pro-

blemele de actualitate. Accentuind aspectele geometrice și topologice, Stoilow grupează rezultatele esențiale în jurul noțiunilor de funcție analitică, domeniu natural de existență și punct singular. Cele trei moduri clasice de prezentare ale teoriei funcțiilor, datorite lui Cauchy, Riemann și Weierstrass, se îmbină armonios, iar tratarea locală este urmată de teoria prelungirii analitice și de studiul celor mai importante clase de funcții analitice și al suprafețelor lor riemanniene. Se știe că una dintre cele mai dificile probleme, care trebuie rezolvate atunci când se scrie un tratat de teoria funcțiilor de o variabilă complexă, constă în prezentarea într-o formă riguroasă și totuși concentrată a elementelor necesare de topologia planului. Stoilow rezolvă într-un mod cu totul nou și elegant această problemă. El deduce toate aceste rezultate din teorema lui Antoine, pentru care dă indicație bibliografică și care apare astfel ca un principiu unificator.

Volumul al II-lea (1958) reflectă unele dintre cursurile speciale ținute de Stoilow „alese astfel ca să poată servi drept bază și introducere în cercetare”, aprofundează funcțiile armonice, principiile extremale ale teoriei funcțiilor, suprafețele riemanniene abstracte și de acoperire (definite cu ajutorul transformărilor interioare), funcții analitice pe suprafețe riemanniene închise și deschise (diferențiale și integrale abeliene), regulat și normal exhaustibilitate. În acest volum Stoilow consacră un loc deosebit rezultatelor obținute de cercetătorii români — elevii săi.

O mare parte din rezultatele incluse în aceste volume apăreau pentru prima dată în limba română. Domenii importante pentru care pînă atunci singurele surse de informare erau periodicele sau unele monografii străine deveneau astfel accesibile tineretului și matematicienilor din țara noastră.

Tradusă de I. Berstein în limba rusă [73], această operă a dobîndit o circulație mai largă, fiind ades citată atît ca bibliografie complementară în manualele de teoria funcțiilor, cit și ca punct de plecare în cercetare, de exemplu în lucrările lui J. Krzyż *An extremal length problem* și a lui E. Żłotkiewicz *The region of variability of the ratio $f(b)/f(c)$ within the class of meromorphic and univalent functions in the unit disc*, ambele publicate în „Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska” (Lublin), Sect. A Math., 22—24 (1968—70), 95—103, respectiv 201—208.

Anii care au urmat din toamna 1948, cînd Stoilow se întoarce de la Paris, unde îndeplinise înalta misiune de ambasadador al țării noastre, sînt totodată ani de muncă intensă și rodnică pentru dezvoltarea matematicii românești, pentru făurirea unei adevărate școli de analiză complexă. Reforma învățămîntului și reorganizarea Academiei Române creaseră condiții deosebit de prielnice pentru înflorirea științei și culturii în patria noastră. În cadrul Universității din București și la Institutul de matematică al Academiei, profesorul Simion Stoilow organizează unul din primele seminarii științifice din țară, care a constituit nucleul grupului de specialiști, pe care cu mare dăruire îi inițiază în cercetare. În ședințele săptămînale ale acestui seminar se dezbate lucrări recente (de cele mai multe ori folosindu-se extrase pe care profesorul le primea de pretutindeni), dar și cercetări originale ale participanților. Cursurile sale de mare prestigiu, dedicate unora din cele mai actuale teme din teoria funcțiilor, atrag tineretul spre acest domeniu, astfel încît rîndurile seminarului se lărgesc mereu cu noi elemente valoroase, care vor constitui, peste ani, nume prestigioase în matematica contemporană. Și Simion Stoilow a avut bucuria să cunoască începuturile acestor realizări. În 1956 cu ocazia celui de al IV-lea Congres al matematicienilor români de la București, care a întrunit un număr însemnat de savanți iluștri din toate țările, el se putea mîndri cu generația tinăra formată la facultățile noastre și în special la Institutul de matematică, în toate disciplinele matematice, dar și în teoria funcțiilor complexe și topologie, sub directsa îndrumărea.

Cît de mult dorea Stoilow afirmarea aceasta a tinerei matematicii românești o mărturisesc, pe de o parte ciclul de note din „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris”, trimise, prin grija și sub coordonarea sa, în preajma congresului, de elevii săi, pe de altă parte cuvîntul său în calitate de președinte al comitetului de organizare al acestui congres ([75], pp. 103—106). Tot astfel, în cadrul conferințelor ținute în anii următori la universitățile din Moscova, Roma, Berlin, Helsinki, Paris sau la diferite colocvii organizate în țară cu participare internațională, el prezintă întotdeauna alături de propriile sale cercetări și rezultate ale elevilor săi, care se încadrau în tema tratată [55], [57], [59]—[65].

Stoilow a reușit să imprime seminarului său o atmosferă de lucru intens, de înaltă exigență științifică, de prietenie și colaborare între participanți, deosebit de prietnică cercetării, pe care o concepea desfășurată pe un front larg. Iată de ce diversifica mereu tematica propusă elevilor săi, îndreptându-i către domenii cu mare perspectivă, dar variate, de la continuarea lucrărilor sale asupra diferitelor clase de acoperiri riemanniene, la studiul acoperirilor riemanniene în cazul neorientabil, teoria suprafețelor riemanniene deschise abstracte (domeniu în mare efervescență în anii cincizeci), evasiconformitatea 2-sau n -dimensională (ultima direcție aflându-se chiar la început), teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe (pe atunci într-o etapă de constituire) sau diferite teme de topologie.

Către 1958, pentru a putea discuta cu folos o tematică atât de nouă și în majoritatea cazurilor în plină dezvoltare, s-a simțit nevoia organizării unor cicluri mai lungi de expuneri, după planuri alcătuite la început de an școlar sau de semestre. În felul acesta, participanții la seminar au putut urmări în mai multe rânduri adevărate cursuri ținute de Martin Jurchescu despre spații analitice, de Nicu Boboc, Cornel Constantinescu și Aurel Cornea despre frontierele suprafețelor riemanniene sau teoria potențialului pe aceste suprafețe, de Ionel Bucur despre teoria categoriilor, iar eu trebuia să încep un ciclu despre reprezentările evasiconforme, chiar în săptămâna din aprilie 1961 cu arbori încărcați de flori, dar cu atîta jale în sufletele noastre, în care l-am pierdut pe neașteptate pe scumpul nostru profesor ... Am prezentat aceste expuneri în săptămânile următoare, cînd ne întâlneam cu inimile îndoliate, căutînd calea de a continua opera sa. Ulterior, s-au prezentat și alte cicluri de expuneri de spații analitice (M. Jurchescu), evasiconformitate n -dimensională (P. Caraman), spații Teichmüller (C. Andreian Cazacu), teoria dimensiunii (A. Deleanu). Trep-tat însă, seminarul nostru s-a ramificat astfel încît în locul unui singur colectiv astăzi își desfășoară activitatea:

Seminarul de spații complexe condus de M. Jurchescu, care grupează o puternică școală cu reprezentanți de mare prestigiu: G. Gussi, C. Bănică, O. Stănășilă, P. Flondor și un mare număr de tineri talentați. În decursul anilor, seminarul acesta a colaborat ades cu specialiști în algebra locală și geometria algebrică, de exemplu cu N. Radu.

Seminarul de teoria potențialului, condus de N. Boboc, la care participă P. Mustață, Gh. Bucur, L. Stoica și alți tineri valoroși. La acest seminar a colaborat în primii ani și I. Cuculescu.

Seminarul de evasiconformitate, evasiregularitate și grupuri Klein, pe care l-am ținut cu unele întreruperi pînă în 1978, împreună cu D. Ivașcu și pe care nădăjdum să-l reluăm.

Printre realizările Seminarului Stoilow, pe lîngă importante cercetări ale membrilor lui, se numără și o serie impresionantă de monografii, care începe cu volumul intitulat:

Seminar S. Stoilow, 1959—1960. Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene, de N. Boboc, C. Constantinescu și A. Cornea, Ed. Academiei R.P.R., 1962 și continuă cu

Probleme moderne de teoria funcțiilor de C. Andreian Cazacu, C. Constantinescu și M. Jurchescu, Ed. Academiei R.P.R., 1965;

Topologie, Categorii și Suprafețe riemanniene de C. Andreian Cazacu, A. Deleanu și M. Jurchescu, Ed. Academiei R.S.R., 1966;

Ideale Ränder Riemannscher Flächen de C. Constantinescu și A. Cornea, *Ergebnisse der Mathematik*, 32, Springer-Verlag, 1963;

Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique de N. Boboc și P. Mustață, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 68, 1968;

Potential Theory on Harmonic Spaces de C. Constantinescu și A. Cornea, Springer-Verlag, 1972;

Conuri convexe de funcții continue pe spații compacte de N. Boboc și Gh. Bucur, Ed. Academiei R.S.R., 1976;

Order and convexity in potential theory: H-cones de N. Boboc, Gh. Bucur și A. Cornea, *Lecture Notes in Mathematics*, 853, Springer-Verlag, 1981.

Funcții complexe de N. Boboc, Ed. Didactică și Pedagogică, 1969;

Teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe de C. Andreian Cazacu, Ed. Didactică și Pedagogică, 1971, tradusă în limba germană, Verlag der Wissenschaften RDG și Birkhäuser Verlag, Elveția, 1975;

Introduzione agli spazi analitici (2 vol.) de M. Jurchescu, Quaderni dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Perugia, 1971 și 1974;

Sulla teoria delle categorie de M. Jurchescu, în aceeași serie, Roma, 1974;

Melode algebrice în teoria globală a spațiilor complexe de C. Bănică și O. Stănășilă, Ed. Academiei R.S.R., 1974, tradusă în limbile engleză (1976) și franceză (1977), coeditări cu J. Wiley, respectiv Gauthier-Villars;

Homeomorfisme cvasiconforme n -dimensionale de P. Caraman, Ed. Academiei R.S.R., 1968, tradusă în limba engleză, coeditare cu Abacus Press (1974);

Introducere în analiza pe varietăți de M. Jurchescu, curs, Universitatea din București, Facultatea de matematică, 1980.

Multe din aceste monografii au fost dedicate de autorii lor memoriei profesorului nostru drag, Simion Stoilow.

Continuând tradiția lui Stoilow, membrii seminarului au organizat în 1969 două manifestări științifice internaționale, care s-au bucurat de un remarcabil succes: Seminarul româno-finlandez de spații Teichmüller și reprezentări cvasiconforme, Brașov, august 1969 și Seminarul de spații analitice, București, septembrie 1969, prezidat de însuși Henri Cartan, unul dintre principalii făuritori ai acestei teorii. Au urmat apoi alternativ în Finlanda și România seminarii de analiză complexă: Jyväskylä august 1973, București iunie 1976, Joensuu august 1978, București iunie 1981. Începând cu cel de al II-lea Seminar româno-finlandez tematica s-a lărgit, cuprinzând întreaga gamă de preocupări ale Seminarului Stoilow: cvasiconformitate, spații Teichmüller și grupuri Klein, teoria funcțiilor de una sau mai multe variabile complexe, teoria potențialului, precum și metode de teoria funcțiilor în analiza funcțională, direcție corespunzând puternicii școli românești de teoria operatorilor de la Secția de matematică INCREST. Trebuie să menționăm că bazele acestei frumoase colaborări științifice cu matematicienii finlandezi au fost puse acum aproape o jumătate de veac de însuși profesorul Simion Stoilow împreună cu profesorul Rolf Nevanlinna (care printre alte distincții internaționale a primit și titlul de doctor honoris causa al Universității din București în 1942). Această colaborare este continuată de membrii Seminarului alături de care să amintim atît pe P. Caraman, P. Mocanu și K. Teleman, cit și pe Zoia Ceașescu, I. Suciu, Gr. Arsene, C. Bănică,

Gh. Bucur, G. Gussi, L. Stoica, S. Teleman, I. Valușescu, F.-H. Vasilescu, D. Voiculescu și mulți tineri, iar din partea finlandeză de O. Lehto, I. S. Louhivaara, I. Laine, S. Rickman, O. Martio și alții.

Lucrările acestor seminarii au fost publicate în volumele: *Proceedings of the Romanian-Finnish Seminar on Teichmüller spaces and Quasiconformal Mappings*, C. Andreian Cazacu ed., Publishing House of the Academy S.R.R., 1971.

Espaces Analytiques, M. Jurchescu ed., Editions de l'Académie RSR, 1971.

Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Proceedings, Bucharest 1976, C. Andreian Cazacu, A. Cornea, M. Jurchescu and I. Suciu eds. Lecture Notes in Math., 743, Springer-Verlag, 1979.

Complex Analysis, Joensuu 1978, Proceedings, I. Laine, O. Lehto and T. Sorvali eds., Lecture Notes in Mathematics, 747, Springer-Verlag, 1979.

O dovadă a prețurii deosebite de care se bucura Simion Stoilow în lumea matematică o constituie și apariția volumului omagial cu prilejul celei de a 70-a aniversări a zilei sale de naștere în 1957, volumul 2 din „Revue de Mathématiques Pures et Appliquées”, cuprinzînd pe lângă importante lucrări românești articole semnate de nume prestigioase ca: R. Nevanlinna, G. T. Whyburn, E. Čech, A. Denjoy, M. Heins, B. Segre, T. Kuroda, Y. Tôki, M. Ohtsuka, G. N. Polojii, A. Császár, D. G. Bourgin. Volumul i-a fost înmînat profesorului Stoilow cu prilejul impresionantei sărbătoriri de la 28 martie 1958 din Aula Academiei Române (a se vedea „An. Acad. R.P.R.”, 8 (1958), 175—201). Facultatea de matematică din București a cinstit de asemenea pe marele ei profesor printr-o festivitate emoționantă în amfiteatrul Spiru Haret la 9 martie 1958 (a se vedea, „Gaz. mat.-fiz.”, ser. A 10(63), 5, (1958)).

Am dori să prezentăm în cele ce urmează unele dintre numeroasele cercetări inspirate din opera lui Simion Stoilow. Expunerea va adinci numai unele aspecte, deoarece chiar o simplă enumerare a lucrărilor, în care este citat, în care rezultatele sale sînt reluate sau aplicate, ar alcătui o listă extrem de vastă. Ne vom călăuzi în alegerea materialului de ultimul său memoriu de activitate *Exposé sommaire de mon travail de recherche* [75], pp. 27—33.

Istoria acelei părți din opera sa pe care am studiat-o în această lucrare poate fi începută cu noțiunea fundamentală de *transformare interioară*, urmărind dezvoltarea ei în topologia generală, în teoria funcțiilor complexe de una sau mai multe variabile, în teoria cvasiconformității și a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Odată cu trecerea timpului, această noțiune și-a adâncit sensul în raport cu noile teorii matematice. Să remarcăm, de exemplu, noi interpretări legate de teoria categoriilor în teza *Asupra unei clase de transformări interioare* susținută de Florica Bucur în 1965. În acest sens, teorema de caracterizare topologică a funcțiilor analitice a lui Stoilow exprimă echivalența categoriei ale cărei obiecte sînt suprafețele riemanniene abstracte și morfismele aplicațiile olomorfe cu categoria formată de varietățile 2-dimensionale triangulabile și orientabile ca obiecte și transformările interioare ca morfisme.

Problema aprofundării transformărilor interioare între spații topologice generale, problemă la care după cum am văzut Stoilow însuși a adus contribuții esențiale și pe care a urmărit-o neconținut, a preocupat pe mulți matematicieni și constituie încă un subiect actual de cercetare. La scurt timp după introducerea de către Stoilow a acestor transformări, N. Aronszajn, G. T. Whyburn, P. S. Alexandrov și alții le-au consacrat importante lucrări, menite să lămurească poziția lor în cadrul general al transformărilor continue.

În lucrarea *Über ein Urbildproblem*. („Fund. Math.”, 17 (1931), 92—121), N. Aronszajn a demonstrat, de exemplu, că spațiile cvasipeanice (i.e. G_δ absolute, separabile, conexe și local conexe) sînt caracterizate complet ca imagini de den-drite (i.e. continuuri local conexe, care nu conțin nici o curbă simplă închisă) prin transformări interioare, după cum spațiile peanice sînt imagini continue ale unui segment de dreaptă. Generalizînd o teoremă a lui M. A. Lavrentiev de extindere a homeomorfismelor, S. Mazurkiewicz a arătat în *Sur les transformations intérieures* („Fund. Math.”, 19 (1932), 198—204) că transformările interioare între mulțimi situate în spații complete separabile se extind ca transformări interioare de G_δ absolute din aceste spații.

Am urmărit mai sus profunda analiză la care Stoilow a supus teorema lui Hadamard. Vasta generalizare, pe care el a dat-o acestei teoreme în 1933 [28], a fost continuată de

S. Eilenberg, S. Banach și S. Mazur. Ulterior T. Ganea, pe baza unui important studiu al spațiilor de acoperire, a reluat această problemă și a obținut următoarea teoremă, care include principalele rezultate anterioare („Stud. cercet. mat.”, 1 (1950), 418—471):

Dacă X este un spațiu compact, conex și local conex, iar Y un spațiu Hausdorff și dacă aplicația continuă $f: X \rightarrow Y$ este un homeomorfism local, atunci (X, f, Y) este un spațiu de acoperire în sensul lui Chevalley (a se vedea p. 87). În particular, dacă Y este simplu conex în sensul lui Chevalley, f este un homeomorfism, iar simpla conexiune în sensul acesta este mai generală decît simpla conexiune definită cu ajutorul homotopiei*.

Una dintre cele mai importante contribuții la dezvoltarea teoriei lui Stoilow într-un cadru topologic general a fost adusă de G. T. Whyburn, într-un mare număr de lucrări, dintre care vom cita memoriul *Open mappings on locally compact spaces* (Mem. Amer. Math. Soc., 1, New York, 1950) și cele două monografii relative la conexiunile dintre analiză și topologie (citare la p. 56). Prin aceste cărți de referință, G. T. Whyburn a influențat și terminologia domeniului. Astfel, denumirea de transformare interioară este folosită de el în sensul de transformare deschisă. Mai exact, el distinge următoarele concepte: Fie $f: X \rightarrow Y$ o transformare continuă între spațiile topologice X și Y . Această transformare este numită *interioară*, dacă orice deschis U din X este transformat într-un deschis $f(U)$ din $f(X)$, *tare interioară*, dacă pentru orice deschis U din X , $f(U)$ este deschis în Y și *cvasi-interioară*, dacă oricare ar fi $y \in Y$ și deschisul $U \subset X$, care conține o componentă compactă a lui $f^{-1}(y)$, y este cuprins în interiorul lui $f(U)$ relativ la Y . În terminologia sa, mult folosită mai ales în literatura de limbă engleză, o transformare interioară în sensul lui Stoilow va fi denumită transformare *light strongly interior*; de multe ori ea este însă denumită *light interior* sau *light open*. În cele ce urmează folosim în continuare denumirile profesorului Stoilow. Dacă în *Analytic topology*, G. T. Whyburn studiază transformările continue în spații metrice separabile, în memoriul din 1950 teoria se dezvoltă într-un continuu generalizat (i.e. spațiu me-

* Rezultate interesante în legătură cu generalizarea teoremei lui Hadamard dată de S. Stoilow [28] au fost obținute în 1982 de Mihai Cristea.

tric separabil, conex și local compact) cu justificarea că acest cadru include domeniile plane, că orice domeniu al unui astfel de spațiu este la rândul său un continuu generalizat și că aceste spații sînt invariante de transformările continue deschise. Luînd ca punct de plecare monografia [39] și alte lucrări ale lui Stoilow, G. T. Whyburn aprofundează în acest memoriu domeniile normale și normal exhaustibilitatea, diferite clase de transformări continue $f: X \rightarrow Y$, transformările compacte (oricare ar fi compactul $K \subset f(X)$, $f^{-1}(K)$ e compact în X), monotone (pentru orice $y \in f(X)$, $f^{-1}(y)$ este un continuu: spațiu metric, compact și conex), strict monotone (pentru orice continuu C din $f(X)$, $f^{-1}(C)$ este un continuu din X), evasimonotone (pentru orice continuu $C \subset f(X)$ cu interiorul relativ la $f(X)$ nevid, $f^{-1}(C)$ are un număr finit de componente, fiecare aplicată de f pe C), evasiinterioare, precum și legătura lor cu transformările deschise sau 0-dimensionale. Menționăm printre rezultate diferite forme ale teoremei de factorizare Eilenberg-Whyburn a unei transformări continue $f: X \rightarrow Y$ într-o compunere de transformări $f = f_2 \circ f_1$, unde $f_1: X \rightarrow M$ este monotonă și $f_2: M \rightarrow Y$ este 0-dimensională, pentru f compactă, deschisă sau evasiinterioară. De asemenea se studiază multiplicitatea acoperirii și se stabilesc proprietăți ale șirurilor de transformări.

Cazul 2-dimensional este tratat de G. T. Whyburn în *Topological analysis*, dar și în lucrări anterioare. Astfel, în § 3 din memoriul publicat în 1950, el pune problema găsirii unei metode elementare de a demonstra că o funcție analitică neconstantă este o transformare interioară, metodă bazată direct pe existența derivatei complexe fără a utiliza dezvoltarea în serie de puteri sau teoria integrării, deci fără a folosi teorema lui Rouché sau proprietățile zerourilor funcțiilor analitice, în particular ale derivatei unei astfel de funcții. El însuși indică două procedee, primul utilizînd însă faptul că zerourile derivatei sînt de ordin finit, al doilea faptul că aceste zerouri formează o mulțime numărabilă. Primul procedeu studiază comportarea locală a transformării, cel de al doilea folosește un rezultat de tipul lemei de prelungire a lui Stoilow din [39], cap. VI. Un răspuns la această problemă avea să fie dat de H. G. Eggleston și H. D. Ursell, care stabilesc o astfel de demonstrație elementară cu ajutorul indicelui unei curbe în lucrarea *On the lightness and strong inte-*

riority of analytic functions („J. London Math. Soc.”, 27, 3 (1952), 260–271). În același an, C. J. Titus și G. S. Young obțin o nouă cale de a rezolva problema, care presupune însă cunoscut faptul că mulțimea zerourilor derivatei are dimensiunea ≤ 0 . Acești autori consideră în lucrarea: *A Jacobian condition for interiority* („Michigan Math. J.”, 1 (1952), 89–94) un deschis $D \subset E^n$ — spațiul euclidian n -dimensional și o aplicație $f: D \rightarrow E^n$ de clasă C^1 . În ipoteza că mulțimea Z a zerourilor jacobianului J_f este un compact din D de dimensiune $\leq n-2$, ei demonstrează că f este evasiinterioară. O a doua teoremă stabilește aceeași concluzie în ipotezele: f transformare 0-dimensională, $J_f \geq 0$ (resp. ≤ 0) în D și dimensiunea lui Z cel mult egală cu $n-1$. Se remarcă apoi că o aplicație 0-dimensională și evasiinterioară este evident deschisă. Fără a ne opri asupra unei a treia teoreme de factorizare de tip Eilenberg-Whyburn, să subliniem analogia dintre teorema a doua și teorema lui Stoilow din [40], care se referă, e drept, la cazul 2-dimensional, însă ajunge în condiții similare la aceeași concluzie.

Din anii 1945–47 datează o altă direcție importantă de cercetare, datorită lui M. Morse împreună cu M. Heins („Ann. of Math.”, 46 (1945), 600–624 și 625–666, precum și 47 (1946), 233–274; „Acta Math.”, 79 (1947), 51–103), în care se aprofundează clasele de deformări ale funcțiilor meromorfe și transformărilor interioare, precum și funcțiile „pseudoarmonice”. Aceste funcții se află față de funcțiile armonice într-un raport similar cu acel al transformărilor interioare față de funcțiile analitice. O funcție $u: V \rightarrow \mathbb{R}$, unde V este o varietate 2-dimensională se numește *pseudoarmonică*, dacă pentru orice punct $p \in V$ există o vecinătate deschisă U și un homeomorfism τ al lui U pe un disc, astfel încît $u \circ \tau^{-1}$ să fie funcție armonică. Monografia lui Morse din 1947, citată la p. 57, constituie o prezentare de sinteză a teoriei acestor funcții și a legăturilor ei strînse cu teoria lui Stoilow a transformărilor interioare. Ulterior, funcțiile pseudoanalitice au fost studiate de Jenkins, Morse și Jenkins, Tôki. Ele au fost analizate în Seminarul Stoilow și cu această ocazie I. Berstein a dat o caracterizare foarte simplă a pseudoconjugatei v a unei pseudoarmonice u (i.e. a unei funcții astfel încît $u + iv$ să formeze o transformare interioară) („Bul. științ.”, sect. mat.-fiz., Acad. R.P.R., 7 (1955), 75–78).

În 1950 Stoilow deschide un nou drum de cercetare prin conferința ținută la Budapesta [49] despre transformările interioare ale varietăților 3-dimensionale. În același an, Marie Hélène Schwartz încercase să extindă teoria lui Ahlfors la varietăți n -dimensionale, lucrând cu transformări simplciale. Aceste transformări, remarcă Stoilow, sînt interioare, dar folosirea lor prezintă restricții care țin mai mult de metodă decît de natura însăși a problemei. Se impune deci cercetarea directă a transformărilor interioare. Sînt aceste transformări topologic echivalente cu cele simplciale? Problema fundamentală, extrem de dificilă și nici astăzi pe deplin elucidată, constă în stabilirea proprietăților mulțimii de ramificare B_f pentru transformarea interioară $f: V \rightarrow W$, unde V și W sînt varietăți n -dimensionale (sau chiar mai general spații topologice cu anumite proprietăți) și a mulțimii imagine fB_f . Stoilow atacă această problemă pentru V și W varietăți 3-dimensionale, stabilind că $\dim B_f \leq 1$, cu ajutorul unei teoreme a lui R. L. Wilder de caracterizare a varietăților 2-dimensionale din lucrarea *On the properties of domains and their boundaries in E_n* („Math. Ann.,” 109 (1934), 273–306). Deși P. T. Church a găsit o lacună în aplicarea de către Stoilow a teoremei lui Wilder (a se vedea *Differentiable open maps on manifolds*, „Trans. Amer. Math. Soc.,” 109, 1 (1963), 87–100), afirmația $\dim B_f \leq 1$ s-a demonstrat a fi — nu întotdeauna, dar în anumite condiții foarte generale — valabilă. Mai mult, în aceste condiții ea este precizată: sau $B_f = \emptyset$ (i.e. f este un homeomorfism local) sau $\dim B_f = 1$. Pentru obținerea acestui rezultat au fost necesare însă studii aprofundate ale multor matematicieni:

După cum am văzut în cazul 2-dimensional, o altă teoremă fundamentală a lui Stoilow stabilea că o transformare interioară: continuă deschisă și 0-dimensională este discretă [17] (a se vedea teorema 1 la p. 69 de mai sus). În mod natural s-a pus problema, dacă această teoremă se extinde la $n > 2$ dimensiuni. După numeroase eforturi, la un moment dat răspunsul părea a fi afirmativ (A. V. Bondar, *Metricheskie voprosi teorii funkții i otobrajenii*, vol. III, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Kiev, 1971, pp. 12–30). Totuși D. Wilson a rezolvat în mod negativ problema în memoriul *Open mappings on manifolds and a counterexample to the*

Whyburn conjecture („Duke Math. J.,” 40, 3 (1973), 705–716). Într-adevăr, el a demonstrat prin raționamente fine și construcții ingenioase teorema:

Dacă $n \geq 3$ și V este o varietate n -dimensională bordată sau nu, triangulată, există o aplicație continuă deschisă și 0-dimensională, surjectivă, $f: V \rightarrow V$, astfel încît pentru orice punct p din bordul lui V , $f^{-1}(p) = \{p\}$, iar pentru orice p care nu aparține scheletului $(n-1)$ -dimensional al lui V , $f^{-1}(p)$ este homeomorf cu mulțimea Cantor standard.

Mai mult, el a arătat că pentru $n \geq 3$ există o aplicație $f: E^n \rightarrow E^n$ continuă, deschisă și 0-dimensională, surjectivă, astfel încît preimaginea oricărui punct să fie homeomorfă cu mulțimea Cantor standard. În concluzie, pentru $n \geq 3$ dimensiuni aplicațiile continue, deschise și discrete formează doar o submulțime proprie a celor continue deschise 0-dimensionale.

Aceeași teoremă a lui Wilson tranșează în mod negativ și problema, dacă inegalitatea din lucrarea [49] este totuși valabilă în cazul general, deoarece aplicația f din această teoremă are $B_f = V$, deci $\dim B_f = n$ și $n \geq 3$.

Vom urmări acum cercetările intense consacrate acestei tematici, care au condus după cum spuneam la clase de transformări, ce verifică inegalitatea lui Stoilow $\dim B_f \leq 1$ din cazul $n=3$, respectiv generalizarea ei, $\dim B_f \leq n-2$.

Dintre aceste clase cea mai importantă este aceea a transformărilor continue, deschise și discrete pentru care A. V. Cernavski în lucrarea *Konecinokratnie otkritie otobrajenia mnogobrazii*, și completarea la această lucrare („Mat. Sbornik”, 65 (1964), 357–369, respectiv 66 (1965), 471–472) și independent, pe o altă cale, J. Väisälä în lucrarea *Discrete open mappings on manifolds* („Ann. Acad. Sci. Fenn.,” Ser. A I, Math., 362 (1966), 1–12) au reușit să demonstreze că $\dim B_f \leq n-2$, (deci pentru $n=3$, să stabilească inegalitatea lui Stoilow).

Pe de altă parte, Iu. Iu. Trohimciuk în articolul *O neprerivnih otobrajeniah oblasti evklidova prostranstva* („Ukrain. Mat. Ž.,” 16 (1964), 196–211) a arătat că pentru dimensiunea $n=3$ și o aplicație f continuă, 0-dimensională și deschisă, dacă $B_f \neq \emptyset$, atunci $\dim B_f > 0$.

Lucrarea *The extension of interiority, with some applications* („Trans. Amer. Math. Soc.,” 103, 2 (1962), 329–340) a matematicienilor C. J. Titus și G. S. Young conține însă următoarea teoremă importantă:

Fie V și W două varietăți n -dimensionale. O aplicație $f: V \rightarrow W$ continuă 0-dimensională, care păstrează orientarea, este deschisă și discretă; ea este un homeomorfism local pe o mulțime deschisă densă în V .

Grupind aceste rezultate deducem că pentru $n=3$ și o transformare continuă $f: V \rightarrow W$, 0-dimensională, care păstrează orientarea sau $B_f = \emptyset$ sau $\dim B_f = 1$.

Adăugarea ipotezei diferențiabilității a condus la alte rezultate interesante, printre care la o nouă clasă de transformări cu $\dim B_f \leq n-2$. Astfel, Church, în memoriul citat mai sus din 1963, demonstrează propozițiile:

Fie $f: V \rightarrow W$ o aplicație de clasă C^n între varietățile diferențiabile n -dimensionale V și W .

1) Dacă f este deschisă, $\dim fB_f \leq n-2$.

2) Dacă f este deschisă și 0-dimensională, $\dim B_f \leq n-2$.

3) Dacă f este 0-dimensională sînt echivalente următoarele afirmații: f este deschisă $\Leftrightarrow J_f \geq 0$ (resp. ≤ 0). $\Leftrightarrow B_f \subset R_{n-2}$, unde $R_k = \{x \in V: \text{rangul matricii jacobianului lui } f \text{ în punctul } x \text{ este } \leq k\}$.

4) Dacă f este deschisă și V compactă, atunci f este 0-dimensională.

Din afirmația 2) de mai sus și rezultatul lui Trohimeciuk, deducem că pentru $n=3$ și o transformare $f: V \rightarrow W$ de clasă C^3 , deschisă și 0-dimensională, $B_f = \emptyset$ sau $\dim B_f = 1$.

Studiul mulțimilor B_f și fB_f formează obiectul și al altor articole. Astfel, P. T. Church și E. Hemmingsen au publicat numeroase rezultate relative la aceste mulțimi în trei lucrări cu același titlu *Light open maps on n -manifolds* (Duke Math. J., 27, 4 (1960), 527–536; 23, 4 (1961), 607–623 și 30 (1963), 379–389). Ei au demonstrat de exemplu propozițiile:

Oricare ar fi X și Y spații metrice separabile, iar $f: X \rightarrow Y$ aplicație continuă, mulțimea B_f este închisă. Dacă X este și local compact, mulțimea fB_f este un F_σ . Dacă f este 0-dimensională, $\dim f^{-1}(fB_f) \leq \dim fB_f$.

Fie acum din nou V și W două n -varietăți, iar $f: V \rightarrow W$ o transformare continuă. Church și Hemmingsen deduc o nouă generalizare a teoremei lui Stoilow: dacă f este deschisă și 0-dimensională, dacă $\dim B_f \leq n-2$ și $\dim fB_f \leq n-1$, atunci f este discretă. Tot în ipoteza că f este deschisă și 0-dimensională, la care adăugă acum numai inegalitatea $\dim fB_f \leq n-1$, ei demonstrează că $\dim fB_f = \dim f^{-1}(fB_f) = \dim B_f$.

Presupunind că f este 0-dimensională și că $\dim fB_f \leq n-2$, stabilesc că f este deschisă. În cazul cînd V și W sînt submulțimi din E^n , iar f este de clasă C^1 , obțin $\dim fB_f \leq n-1$.

Aceste lucrări ale lui Church și Hemmingsen, ca și lucrarea lui Church citată mai sus, conțin multe exemple foarte interesante de transformări interioare f , pentru care B_f sau fB_f au proprietăți neașteptate, total diferite în cazul $n \geq 3$ de cazul $n=2$. Mulțimea de ramificare B_f nu poate avea pentru $n \geq 3$ puncte izolate, dar poate conține componente punctuale. Se construiesc transformări interioare $f: E^3 \rightarrow E^3$, de clasă C^∞ , pentru care B_f are o componentă punctuală și chiar o mulțime Cantor de componente punctuale; pentru $n \geq 4$, există transformări interioare $f: S^n \rightarrow S^n$ (de grad 3) astfel încît B_f nu conține nici o $(n-2)$ -varietate compactă, dar pentru orice 2-varietate orientabilă compactă V există și o transformare interioară $f: S^4 \rightarrow S^4$ cu B_f avînd o componentă egală cu V ; pentru $n=3$, B_f poate fi o curbă simplă înnodată etc.

Dacă se renunță la ipoteza 0-dimensionalității, complexitatea problemei crește chiar în cazul $n=2$. Astfel, R. D. Anderson a construit un exemplu de aplicație $f: E^2 \rightarrow E^2$, deschisă, care păstrează orientarea, dar astfel încît preimaginea fiecărui punct din plan să fie un continuu nedegenerat (*On monotone interior mappings in the plane* în „Trans. Amer. Math. Soc.” 73 (1952), 211–222; *Open mappings of compact continua*, „Proc. Nat. Acad. Sci. USA”, 42 (1956), 347–349).

Un alt exemplu de comportare diferită a transformărilor interioare pentru $n=2$, respectiv $n \geq 3$, pus în evidență de Church și Hemmingsen, se referă la teorema lui Whyburn (*Analytic topology*, p. 197) de invarianță a 2-varietăților cu sau fără bord prin astfel de transformări. Se dă exemplu de transformare interioară de n -varietate pentru $n \geq 3$, a cărei imagine nu este o n -varietate.

Lucrarea [49] a lui Stoilow se termină cu următoarea problemă: „E ușor de format transformări interioare de varietăți 3-dimensionale prin operații de translație și rotație în E^3 , aplicate la transformări definite de funcții olomorfe. Se pot obține prin astfel de operații și prin homeomorfisme toate transformările interioare ale lui E^3 ?”

Pînă astăzi, ideea aceasta formulată de Stoilow de a construi transformări interioare plecînd de la funcții olomorfe constituie procedeul cel mai folosit. Ne vom opri acum asu-

pra acestei metode în legătură cu cercetările de topologie, dar o vom relua mai departe în cadrul metrico-topologic al aplicațiilor quasiregulate.

Una din cele mai simple transformări construite pe această cale este *the winding mapping*, aplicația de înfășurare $F_{n,k}: E^n \rightarrow E^n$, ($n \geq 3$ și $k=1,2,\dots$), definită prin $F_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, unde $y_1 + iy_2 = (x_1 + ix_2)^k$, $i = \sqrt{-1}$ și $y_h = x_h$ pentru $h=3, \dots, n$. Pentru această aplicație $B_{F_{n,k}}$ și $F_{n,k} B_{F_{n,k}}$ sînt $(n-2)$ -planul obținut anulind primele două coordonate $x_1 = x_2 = 0$, respectiv $y_1 = y_2 = 0$. Compactificînd E^n cu punctul lui Alexandrov, obținem prin proiecții stereografice aplicația $G_{n,k}: S^n \rightarrow S^n$ (uneori $G_{n,k}$ și nu $F_{n,k}$ este denumită *the winding mapping*). În cazul $n=2$, cu o notație convenabilă, această transformare se scrie $z^k = w$, iar teorema lui Stoilow de inversiune locală a transformărilor interioare asigură echivalența topologică locală a oricărei transformări interioare cu o astfel de transformare în vecinătatea lui $z=0$ (teorema 2 de la p. 69 de mai sus). Plecînd și de la această teoremă de bază a teoriei lui Stoilow s-a pus problema extinderii ei la $n \geq 3$ dimensiuni, cu atît mai mult cu cît în 1936, A. W. Tucker demonstrase în lucrarea *Branched and folded coverings* („Bull. Amer. Mat. Soc.”, 42 (1936), 859—862) că pentru o transformare interioară simplicială $f: V \rightarrow W$ cu V și W varietăți simpliciale (triangulate) compacte 3-dimensionale, B_f constă dintr-un număr finit de 1-simplexe, în jurul interioarelor cărora f este topologic echivalentă cu un $F_{3,k}$.

În memoriul din 1960, Church și Hemmingsen construiesc un exemplu de transformare interioară pe o varietate 3-dimensională, care nu este local compunere de aplicații $F_{3,k}$ și de homeomorfisme. Rămîne totuși problema determinării unor clase de transformări interioare, local topologic echivalente cu aplicații $F_{n,k}$. De exemplu, clasa transformărilor 0-dimensionale f cu proprietatea următoare: pentru orice $p \in B_f$ există o vecinătate deschisă a lui $f(p)$, care intersectează fB_f după o $(n-2)$ -celulă *tame*.

Un alt tip de răspuns la problema extinderii teoremei lui Stoilow este dat de P. T. Church în lucrarea din 1963, prin următoarea teoremă de structură locală:

Dacă $f: V \rightarrow W$ este o aplicație de clasă C^n deschisă și dacă se presupune fie că f este 0-dimensională, fie că V este o

varietate compactă (ceea ce implică după cum am amintit mai sus că f este 0-dimensională), atunci există o mulțime $E \subset V$ închisă cu $\dim E \leq n-3$, astfel încît în vecinătatea oricărui punct din $V \setminus E$, f este topologic echivalentă cu o transformare $F_{n,k}$. Mulțimea E este nicăieri densă în B_f , excepțînd cazul cînd $B_f = \emptyset$.

Metoda de demonstrație folosită de Stoilow în [49] se bazează pe extinderea vecinătăților normale la cazul transformărilor interioare de varietăți 3-dimensionale. Această metodă va fi dezvoltată și aplicată curent în studiul transformărilor interioare n -dimensionale. Church și Hemmingsen aduc precizări asupra acestor vecinătăți, legate de noțiunea de *aplicație de pseudoacoperire*: transformare interioară $f: V \rightarrow W$ pentru care $W \setminus fB_f$ este conexă, iar restricția lui $f: V \setminus f^{-1}(fB_f) \rightarrow W \setminus fB_f$ o aplicație de acoperire de grad finit k (în sensul lui Chevalley, fiecare punct din $W \setminus fB_f$ avînd preimaginea prin restricția lui f alcătuită din k puncte din $V \setminus f^{-1}(fB_f)$). Dacă f este 0-dimensională și $\dim fB_f \leq n-2$ (deci f este și deschisă), iar V este compactă, atunci f este o aplicație de pseudoacoperire.

Cu aceste rezultate am pătruns însă într-un domeniu de mare interes pentru teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe legat de studiul submulțimilor analitice și al generalizărilor la cazul n -dimensional complex a noțiunii de acoperire riemanniană.

Continuînd prezentarea unora dintre rezultatele referitoare la transformările interioare, vom menționa printre criteriile pentru ca aceste transformări să fie discrete pe acelea cuprinse în lucrările *Minimal mappings in euclidean spaces* de J. Väisälä („Ann. Acad. Sci. Fenn.” Ser. A. I. Math., 366 (1965)) și *Otkritiia nul'mernih otobrajeniah mnogobrazii* de Iu. Iu. Trohimciuk (*Metriceskie voprosi teorii funkții i otobrajenii*, vol. I, Akad. Nauk. USSR Inst. Mat., Kiev, 1969, pp. 209—221. În același volum, Iu. Iu. Trohimciuk și A. V. Bondar aprofundează gradul local al aplicațiilor 0-dimensionale, pp. 221—241).

Pe linia extinderii atît a teoriei lui Stoilow a transformărilor interioare, cît și a teoriei aplicațiilor olomorfe definite pe domenii din C^n se situează conceptul de *aplicație cuasiinterioară* a lui Iu. B. Zelinskii (în volumul *Nekotore voprosi sovremennoi teorii funkții*, Akad. Nauk SSSR, Novo-

sibirsk, 1976, pp. 61—67) ca și dizertația lui J. Riihentausta („Ann. Acad. Sci. Fenn.” Ser. A. I. Math., Dissertationes, 6 (1975)).

Am văzut mai sus că în lucrarea [21] din 1929 Stoilow demonstrase o reciprocă a teoremei lui Schoenflies. În aceeași ordine de idei, G. T. Whyburn arătase că o transformare interioară f a unei 2-celule A pe A cu proprietățile: 1) $f|_{\text{fr } A}$ este un homeomorfism și 2) $f(\text{int } A) = \text{int } A$, este un homeomorfism (*An open map approach to Hurwitz's theorem*, „Trans. Amer. Math. Soc.”, 71 (1951), 113—119). Cu acest prilej, el formulase conjectura că rezultatul ar fi valabil și pentru n -celule cu $n \geq 3$. În memoriul lui D. Wilson din 1973 (citât la p. 118 de mai sus) această conjectură este infirmată printr-un contraexemplu, bazat pe propoziția următoare, analoagă cu teorema sa citată anterior: Dacă $n \geq 3$, există o transformare interioară surjectivă $f: I^n \rightarrow I^n$ (unde I este segmentul $[0,1]$), care coincide cu identitatea pe $\text{fr } I^n$, dar are preimaginea oricărui punct din $\text{int } I^n$ homeomorfă cu mulțimea Cantor standard.

Un alt rezultat al lui Stoilow, lema de prelungire a transformărilor interioare din cap. VI al monografiei [39] (a se vedea p. 90 de mai sus) a fost prelucrat de G. T. Whyburn în memoriul din 1950 (citât la p. 115 de mai sus) în forma următoare: Fie X și Y două continuuri generalizate local conexe, astfel încât nici un domeniu din X sau Y nu este disconectat de o mulțime compactă total discontinuă. Dacă transformarea continuă $f: X \rightarrow Y$ este

- 1) 0-dimensională și
 - 2) interioară pe $X \setminus E$, unde $E \subset X$ și $f(E) \subset Y$ sînt mulțimi total discontinue,
- atunci f este transformare interioară.

Iată, de exemplu, alte două extinderi ale lemei de prelungire a lui Stoilow ambele importante prin variatele posibilități de aplicare.

Prima este datorată lui Martin Jurchescu și publicată în ciclul de expuneri la Seminarul Stoilow: *Teoria locală a funcțiilor de mai multe variabile complexe*, p. 103 din volumul *Probleme moderne de teoria funcțiilor*, citat mai sus.

Fie X un spațiu topologic local compact și Y un spațiu topologic local compact și local conex, iar $f: X \rightarrow Y$ o aplicație continuă

- 1) 0-dimensională și

2) interioară pe $X \setminus E$, unde $E \subset X$ este o submulțime nicăieri densă în X , $E = f^{-1}[f(E)]$ și $f(E) = E_1$ este o mulțime nicăieri disconectantă din Y .

În aceste condiții, f este interioară pe X .

Amintim că o submulțime închisă, nicăieri densă E_1 a unui spațiu topologic local conex se numește *nicăieri disconectantă*, dacă orice punct $y \in E_1$ are un sistem fundamental de vecinătăți deschise U , astfel încît $U \setminus E_1$ să fie conexe. O proprietate caracteristică a submulțimilor închise și nicăieri dense, care sînt nicăieri disconectante este următoarea: oricare ar fi deschisul conex $U \subset Y$, mulțimea $U \setminus E_1$ este conexă.

Teorema aceasta se încadrează între rezultatele stabilite de M. Jurchescu în direcția extinderii teoriei lui Stoilow despre acoperirile riemanniene la cazul n -dimensional și își găsește aplicații remarcabile în studiul funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe.

A doua generalizare a lemei lui Stoilow, pe care o vom prezenta aici, datorată lui Iu. Iu. Trohimciuk, constituie fundamentul topologic al metodei cu care acesta a reușit în teza de doctorat susținută la Novosibirsk în 1963 și publicată în monografia *Непрерывное отображение и условия монотонности* (Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva, 1963) să înlăture ipoteza univalenței din teoria monogeneității după H. Bohr și D. E. Menšov. Domeniul de aplicație urmărit de Trohimciuk fiind complet diferit de cel din teorema lui Jurchescu, cadrul în care se formulează extinderea lui este cu totul altul: revenim din nou la varietățile 2-dimensionale și, cum este vorba de proprietăți locale, la domenii din plan.

Fie f o aplicație continuă a domeniului D din planul z în planul w :

- 1) 0-dimensională,
- 2) interioară în $D \setminus E$, cu păstrarea orientării în fiecare punct din $D \setminus E$, unde E este o mulțime perfectă și nicăieri densă din D , iar $E_1 = f(E)$ este o mulțime nicăieri densă din planul w .

În aceste condiții f este interioară în D (și există un punct în E într-o vecinătate a cărui f să fie univalentă).

Din această teoremă Trohimciuk deduce multe rezultate, printre care cităm:

Condiția necesară și suficientă pentru ca aplicația continuă $w = f(z)$ a lui D și interioară în $D \setminus E$, unde E , este o sub-

mulțime perfectă, nicăieri densă a lui D , să fie interioară în D , este ca:

- 1) transformarea f să fie 0-dimensională pe E ,
 - 2) să păstreze orientarea în orice punct din $D \setminus E$, respectiv să o schimbe în orice punct din $D \setminus E$,
 - 3) mulțimea $E_1 = f(E)$ să fie de categoria I.
- Dacă se cere, de exemplu, ca f să fie analitică în fiecare componentă a lui $D \setminus E$ și univalentă pe E , atunci $w = f(z)$ este o transformare interioară în D .

Dacă

- 1) $E = f^{-1}(E_1)$ și f este univalentă pe E ,
- 2) în fiecare componentă a lui $D \setminus E$ fie f , fie $\bar{f}$ este analitică și

3) există componente de ambele tipuri, atunci există un arc analitic în E în vecinătatea căruia f este conform echivalentă cu funcția lui Bohr $B(z) = x + i|y|$ (i.e. $f = \Psi \circ B \circ \varphi$, unde Ψ și φ sînt funcții analitice univalente).

Aceste teoreme, împreună cu aprofundarea mulțimii de monogeneitate a lui Luzin, i-au permis lui Trohimciuk să aducă o contribuție substanțială în problema clasică a stabilirii condițiilor în care funcția $f(z)$, continuă în D , este analitică în acest domeniu. Goursat, Pompeiu, Looman, Montel, Bohr, Rademacher, Menšov (în alte direcții Fedoroff, Bésicovitch, Kuramochi) stabiliseră diferite criterii de analiticitate, după cum am văzut mai sus la p. 60.

Astfel iată cea mai generală formulare a teoremei lui Menšov obținută de Trohimciuk:

Un homeomorfism $w = f(z)$ al domeniului D , care păstrează orientarea, este monogen în D , dacă în fiecare punct din $D \setminus E$, unde E este o mulțime cel mult numerabilă, $f(z)$ verifică una dintre condițiile lui Menšov: proprietățile K' , K'' sau K''' sau invariarea cercurilor infinitesimale.

Amintim că $f(z)$ are în punctul $z \in D$ proprietatea K' , respectiv K'' , dacă pe trei raze plecînd din z situate pe trei direcții diferite există una și aceeași limită:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \arg \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ respectiv } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|;$$

$f(z)$ are în z proprietatea K''' , dacă pe două raze prin punctul z , situate pe direcții diferite, avem una și aceeași limită

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h};$$

$f(z)$ transformă cercuri infinitesimale în cercuri infinitesimale, dacă notînd

$$H(z, r) = \max_{z', z'' \in C(z, r)} \left| \frac{f(z') - f(z)}{f(z'') - f(z)} \right|,$$

unde $C(z, r) = \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, avem $\lim_{r \rightarrow 0} H(z, r) = 1$.

În demonstrarea tuturor acestor rezultate, univalența joacă un rol esențial în raționamentele clasice.

Cu genială putere de pătrundere, Stoilow sublinia în ciclul de lecții de la Sorbona în 1932 [25] rolul transformărilor interioare în extinderea teoriei lui Menšov, iar în lucrarea [31] ridică din nou această problemă, scriind: „Dacă în definiția transformărilor aproape analitice ale lui Lavrentiev, se înlocuiește ipoteza metrică de transformare a elipselor infinitesimale în cercuri infinitesimale printr-una din condițiile lui Menšov, se obține după teorema de prelungire o transformare interioară, în concluzie analiticitate”. Putem spune astfel că nu numai metoda, dar însăși problematica dezvoltată de Trohimciuk își are izvorul în opera profesorului Stoilow.

Cu ajutorul generalizării prezentate mai sus a lemei de prelungire, Trohimciuk demonstrează diferite criterii de analiticitate printre care următoarea propoziție fundamentală (op. cit., p. 177).

Fie $w = f(z)$ o aplicație continuă a domeniului D , care satisface în fiecare punct din D , exceptînd cel mult o mulțime numărabilă de puncte, una din următoarele proprietăți: 1) K' , 2) K'' , 3) K''' , respectiv 4) invariarea cercurilor infinitesimale, și păstrează orientarea în fiecare „ U -punct” (dacă un astfel de punct există) unde verifică condiția 2) sau 4), atunci $f(z)$ este olomorfă în D .

Precizăm că noțiunea de U -punct este introdusă pentru a putea formaliza păstrarea orientării. Un U -punct este un punct $z_0 \in D$ pentru care există două șiruri z'_i și z''_i , care tind la z_0 și cu semitangente t' și t'' în z_0 situate pe drepte diferite din z_0 , în timp ce $w'_i = f(z'_i)$ și $w''_i = f(z''_i)$ sînt diferite de $w_0 = f(z_0)$. Transformarea f păstrează orientarea în z_0 , dacă w'_i

și w_i^* au în w_0 semitangente T' și T'' , astfel încît din $0 < \angle(t', t'') < \pi$ să rezulte $0 \leq \angle(T', T'') < \pi$.

Spre deosebire de generalizarea teoremei Menšov propusă de Stoilow, remarcăm că în acest enunț f nu se presupune interioară în $D \setminus E$, ci satisface o condiție metrică. De aceea demonstrația lui Trohimciuk constă în determinarea unei mulțimi de analiticitate pentru f : mulțime deschisă și densă peste tot în D și apoi în aplicarea lemei lui Stoilow generalizate, prin care problema se reduce la cazul univalent. Exemplele arată că rezultatele sale nu pot fi îmbunătățite.

La Conferința internațională de analiză complexă de la Varna, din septembrie 1981, Iu. Iu. Trohimciuk a prezentat o nouă teoremă de prelungire a transformărilor interioare, cu aplicații la studiul funcțiilor analitice cu o mulțime perfectă de singularități.

Tot un rezultat de prelungire a transformărilor interioare este și următoarea formă topologică a principiului simetriei lui Schwarz, datorat lui C. J. Titus și G. S. Young (*op. cit.*, la p. 119 de mai sus):

Fie $f: E^n \rightarrow E^n$ o transformare continuă, 0-dimensională păstrînd local orientarea în ambele semispații inferior și superior determinate de hiperplanul $P_n = \{x \in E^n : x = (x_1, \dots, x_n), x_n = 0\}$ și care aplică P_n tot pe un hiperplan. Condiția necesară și suficientă ca f să fie interioară pe tot E^n este ca $f|P_n$ să fie 0-dimensională.

O frumoasă aplicație a acestei teoreme este dată de următoarea propoziție: Dacă deschisul D din E^2 este descompus de un arc A în două mulțimi deschise și disjuncte D_1 și $D_2 : D \setminus A = D_1 \cup D_2$ și dacă $f: D \rightarrow E^2$ este o aplicație continuă și 0-dimensională pe D , deschisă pe D_1 și D_2 , iar $\text{int } f(A) = \emptyset$, atunci f este o transformare interioară.

Teorema centrală a teoriei lui Stoilow de descompunere (factorizare) a transformărilor interioare în produsul dintre un homeomorfism și o funcție analitică joacă un rol fundamental în evasiconformitate și teoria sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, care generalizează sistemul Cauchy-Riemann. Am menționat la pp. 59–61 procesul de generalizare, care a condus la apariția reprezentărilor sau homeomorfismelor evasiconforme în cazul 2-dimensional. Teorema lui Stoilow intervine în momentul în care se renunță la injectivitate și

se trece la studiul aplicațiilor evasiconforme. (Denumirea acestor transformări este destul de neunitară. S-a folosit mult și denumirea de funcții pseudoanalitice.) Două sînt aici posibilitățile:

I. Se ia ca punct de plecare o anumită definiție (a se vedea mai jos, această cale descrisă pentru $n \geq 2$ dimensiuni) și atunci unul dintre rezultatele importante constă în demonstrarea faptului că aplicațiile considerate sînt transformări interioare în sensul lui Stoilow. Un prim exemplu de acest fel îl constituie chiar nota [31], în care Stoilow demonstrează că funcțiile aproape analitice ale lui M. A. Lavrentiev sînt transformări interioare. În acest mod au procedat R. Cacciopoli (1952–1953), Y. Tôki și K. Shibata (1954), I. N. Pesin (1955), L. Bers (1953).

II. Se definesc aplicațiile evasiconforme ca fiind transformări interioare supuse unor condiții metrice. Pe această cale au mers, de exemplu, S. Kakutani (1937), K. Noshiro (1950), A. Pfluger (1950), A. Pfluger și J. Hersch (1952), J. Hersch (1955, 1956), A. Mori (1956), L. I. Volkovskii (1950, 1954).

În ambele cazuri se aplică teorema de descompunere a lui Stoilow, astfel încît în monografiile de bază din acest domeniu: *Quasikonforme Abbildungen* de H. Künzi, Springer-Verlag, 1960 și *Quasikonforme Abbildungen* sau *Quasiconformal mappings in the plane* ed. a II-a de O. Lehto și K. I. Virtanen, Springer-Verlag, 1965, respectiv 1973, aceste aplicații sînt definite direct ca fiind compunerea unui homeomorfism evasiconform cu o funcție analitică. Ambele cărți prezintă pe larg transformările interioare. De remarcă înedesebi expunerea originală, extrem de elegantă, pe care Lehto și Virtanen o dau în cap. VI, §1 principalelor teoreme ale lui Stoilow relative la comportarea locală (teorema de inversiune) a acestor transformări, expunere în care se separă proprietățile bazate pe caracterul deschis al transformării de cele unde intervine 0-dimensionalitatea. Cartea lui H. Künzi cuprinde o bogată bibliografie, unde se află și date complete asupra lucrărilor citate în alineatele precedente.

Studiul soluțiilor sistemelor eliptice de ecuații cu derivate parțiale, în primul rînd ale sistemului Beltrami, dar și al altor sisteme mai generale, dezvoltat de școlile lui M. A. Lavrentiev și I. N. Vekua, ca și de L. Bers și colaboratorii săi, a condus la aceeași problemă. S-a demonstrat astfel că

cele mai importante sisteme admit ca soluții transformări interioare. Astfel de rezultate au stabilit M. A. Lavrentiev și B. V. Šabat (1959), G. N. Polojii (1947, 1953, 1957), B. V. Boyarski (1957), L. Bers (1953). În cazul sistemului Carleman, I. I. Daniliuk (1958) a demonstrat că există cel puțin o soluție transformare interioară, celelalte soluții fiind oarecum degenerare. Aceste cercetări, în care numele profesorului Stoilow revine meren, sînt analizate de exemplu în volumele: *Matematika v SSSR za sorok let, 1917—1957* (în articolul lui B. V. Šabat, p. 481) ca și în monografiile: *Metodi teorii funkții kompleksnogo peremennogo*, de M. A. Lavrentiev și B. V. Šabat (1951 și 1958), *Obobščennie analiticeskie funkții* (1959) de I. N. Vekua, *Variacionnii metod v kraevih zadaciah dlia sistem uravnenii ellipticeskogo tipa* de M. A. Lavrentiev (1962), *Obobščennie teorii analiticeskih funkții kompleksnogo peremennogo* de G. N. Polojii (1965), precum și în *Theory of Pseudo-analytic Functions*, Lecture Notes, New York University de L. Bers (1953).

Anii șazeci marchează extinderea teoriei homeomorfismelor evasiconforme la cazul $n (\geq 3)$ -dimensional și în această privință școala profesorului Stoilow se poate mîndri cu contribuția de prim rang adusă de Petru Caraman, a cărui monografie *Homeomorfisme evasiconforme n-dimensionale*, prioritară pe plan mondial, este astăzi citată de toți specialiștii în evasiconformitate. În a doua jumătate a acestui deceniu s-a cristalizat și teoria aplicațiilor evasiconforme n -dimensionale prin opera lui Iu. G. Rešetniak („Sibirsk. Mat. Ž.”, 7 (1966), 1106—1114, 8 (1967), 629—658 și 835—840, 9 (1968), 368—374), precum și a grupului de matematicieni finlandezi O. Martio, S. Rickman și J. Väisälä („Ann. Acad. Sci. Fenn.”, Ser. A. I. Math., 448 (1969), 1—40, 465 (1970), 1—13, 488 (1971), 1—31). (A se vedea în aceeași revistă și lucrările lui J. Väisälä 509 (1972), 1—14, J. Sarvas 1 (1975), 297—307, S. Rickman 2 (1976), 447—466, C. Andreian Cazacu 2 (1976), 17—28 etc.).

Rešetniak a denumit aceste transformări *aplicații cu distorsie mărginită*, dar a prevalat denumirea dată de matematicienii finlandezi de *aplicații sau transformări evasiregulate*, denumire care subliniază faptul că ne aflăm în fața unei generalizări naturale a funcțiilor olomorfe, numite clasic funcții (analitice) regulate. Într-adevăr, din punct de vedere geometric

aceste transformări sînt mai apropiate de funcțiile analitice de o variabilă complexă decît aplicațiile olomorfe de spații complexe, care s-au dezvoltat mult pe baza altor metode algebrico-topologice.

Să remarcăm că primul Seminar româno-finlandez (1969) a prilejuit totodată și prima prezentare de ansamblu a cercetărilor grupului Martio-Rickman-Väisälä (a se vedea volumul seminarului citat la p. 113 de mai sus). Importanța subiectului l-a făcut să fie inclus în programul Congresului internațional al matematicienilor de la Helsinki (1978) prin conferința lui J. Väisälä (*A survey of quasiregular maps in $\mathbb{R}^n$* , Proc. International Congress of Math. Helsinki, 1978, vol. 2, pp. 685—691).

Iată definiția prezentată de acesta: Se știe că funcțiile analitice într-un domeniu G din plan pot fi caracterizate prin proprietățile următoare: sînt funcții f de clasă C^1 , pentru care $|f'(z)|^2 = J_f(z)$, oricare ar fi punctul $z \in G$. Pentru $n \geq 3$, funcțiile de clasă C^1 ce verifică relația $|f'(x)|^n = J_f(x)$, sau echivalent inegalitatea $|f'(x)|^n \leq J_f(x)$, oricare ar fi $x \in G$, coincid după o teoremă a lui Liouville (1850) rafinată (Liouville considerase doar cazul $f \in C^3$) cu transformările Möbius care păstrează orientarea, sau se reduc la constante. O aplicație K -evasiregulată $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ (G fiind un domeniu sau un deschis din $\mathbb{R}^n$ și K o constantă ≥ 1) este o aplicație continuă de clasă ACL^n sau echivalent de clasă Sobolev W_n^1 (deci cu derivate parțiale de ordinul întâi generalizate și local L^n -sumabile), care verifică aproape peste tot în G inegalitatea

$$(5) \quad |f'(x)|^n \leq K J_f(x).$$

Mi se pare semnificativ pentru claritatea viziunii lui Stoilow asupra evoluției matematicii să comparăm citatul de la p. 63 de mai sus cu următorul citat din conferința lui Väisälä, ținută 30 de ani mai târziu: „Definiția aplicațiilor evasiregulate nu are nimic a face cu numerele complexe și, de fapt, această teorie nu aparține de loc analizei complexe ... are rădăcinile în analiza complexă...”.

Legătura strînsă a acestei teorii cu transformările interioare ale lui Stoilow se reflectă în următorul rezultat de bază datorat lui Rešetniak (1968): transformările evasiregulate neconstante sînt deschise și discrete, deci sînt transformări interioare. Conform (5), ele păstrează orientarea.

O problemă centrală o constituie și acum mulțimea punctelor de ramificare. Conform rezultatelor (prezentate în textul de față la p. 119) relative la transformări deschise și discrete ale lui Cernavskii și Väisälä, $\dim B_f \leq n-2$, iar după Church și Hemmingsen, $\dim B_f = \dim (fB_f)$; în cazul $n=3$, dacă $B_f \neq \emptyset$, atunci $\dim B_f = 1$. Măsura Lebesgue a mulțimilor B_f și fB_f e nulă, iar dimensiunea lor Hausdorff $< n$ (J. Sarvas). Aplicațiile cvasiregulate au proprietatea (N) (Rešetniak) și satisfac teoremele lui Liouville, Picard (Rickman), Weierstrass și Iversen pentru singularități esențiale izolate. De remarcat și teorema lui Zorici, după care $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cvasiregulată cu $B_f = \emptyset$ este un homeomorfism.

Reținând din teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă aspectele geometrice, teoria aplicațiilor cvasiregulate (sau cvasimeromorfe în cazul cînd valorile sînt luate pe S^n sau $\bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ în loc de $\mathbb{R}^n$) are drept instrumente principale de lucru domeniile normale ale lui Stoilow și metoda lui Stoilow a ridicării drumurilor. Ambele sînt preluate de Martio-Rickman-Väisälä prin intermediul cărții *Analytic topology* a lui Whyburn, dar filtrate prin prisma unei analize în care ipotezele: deschis, deschis și 0-dimensional, sau deschis și discret sînt net conturate. Stoilow este citat doar în legătură cu ridicarea drumurilor, urmat de Whyburn și E. Floyd (*Some characterizations of interior maps*, „Ann. of. Math.,” 51, 3, (1950), 571—575) poate fiindcă în memoriul din 1971 Martio-Rickman-Väisälä fac o discuție bibliografică în legătură cu această problemă.

Indicele local $i(x, f)$ pentru o aplicație f discretă și gradul lui f pe vecinătățile normale în cazul în care f este discretă și deschisă este aprofundat de Martio, Rickman și Väisälä încă din primul lor memoriu din 1969. Ele sînt aplicate apoi în studiul transformărilor cvasiregulate. Vom cita, de exemplu, precizarea pe care o aduc teoremei de comportare locală de tip Stoilow, stabilită de Church și Hemmingsen și prezentată la p. 122 de mai sus:

Dacă pentru aplicația cvasiregulată $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ există o vecinătate U a punctului $x_0 \in G$ cu imaginea $f(U \cap B_f)$ inclusă într-o $(n-2)$ -bilă cvasiconformă, atunci există o vecinătate V a lui x_0 și homeomorfismele cvasiconforme $\varphi: V \rightarrow B^n$ și $\Phi: B^n \rightarrow \Phi(B^n) \subset f(U)$ pentru care $f|_V = \Phi \circ G_{n,k} \circ \varphi$, unde $k = i(x_0, f)$. În particular, $B_f \cap V$ este o $(n-2)$ -bilă cvasiconformă.

Odată cu definirea aplicațiilor cvasiregulate sau cvasimeromorfe s-a ridicat din nou și problema extinderii la $n \geq 3$ dimensiuni a teoremei de descompunere a lui Stoilow. În cazul $n=2$ această teoremă avea două domenii naturale de aplicabilitate, cel topologic: orice transformare interioară se obține compunînd un homeomorfism cu o funcție analitică, și cel metrico-topologic: orice transformare cvasiregulată (i.e. cvasiconformă după denumirea dominantă în cazul $n=2$) este compunerea unui homeomorfism cvasiconform cu o funcție analitică. Totodată funcțiile analitice coincideau cu aplicațiile 1-cvasiregulate. Cu totul alta este situația în cazul $n \geq 3$: aplicațiile 1-cvasiregulate sînt transformări Möbius, deci injective, prin urmare nu se poate spera extinderea teoremei lui Stoilow prin substituirea analiticității cu 1-cvasiregularitate. S-a căutat atunci să se determine o clasă de aplicații cu comportarea locală cunoscută și proprietăți remarcabile, care să conducă la o descompunere de tip Stoilow și să ne permită astfel să pătrundem mai adînc structura transformărilor studiate.

O contribuție extrem de interesantă relativă la acest mod de a pune problema este cuprinsă în memoriul *On the local behavior of quasiregular maps and branched covering maps* al lui O. Martio și U. Srebro („J. d'Analyse Math.,” 36 (1979), 198—212). Articolul este legat de opera lui Stoilow nu numai prin tematica sa, dar și prin metodele de lucru. El se concentrează asupra cazului $n=3$ și, așa după cum procedase și Stoilow în lucrarea [49], folosește rezultatele 2-dimensionale cunoscute, în esență chiar teorema acestuia de descompunere pentru $n=2$. Nu se poate afirma că Martio și Srebro cunoșteau lucrarea [49], deoarece ei nu o citează, dar există asemănări izbicioare cu demonstrații din [49], asemănări impuse probabil de însăși natura subiectului.

De la început Martio și Srebro restrîng clasa de transformări interioare la aceea a transformărilor continue, deschise și discrete, pe care le numesc *aplicații de acoperire ramificată*, amintind că pentru $n=2$ cele două clase coincid. Alegerea lui Martio și Srebro este desigur determinată de proprietățile mai numeroase, mai simple, ale aplicațiilor de acoperire ramificată și de faptul că transformările cvasiregulate sau cvasimeromorfe determină astfel de acoperiri.

Exemplul construit de Martio, Rickman și Väisälä („Ann. Acad. Sci. Fenn.", Ser. A I Math., 488 (1971) arată că există aplicații de acoperire ramificate $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, care păstrează orientarea, dar nu sînt topologic echivalente cu nici o aplicație evasiregulară. El exclude posibilitatea unei teoreme generale de descompunere legind aceste clase.

Existența vecinătăților normale pentru aplicațiile de acoperire ramificată și proprietățile lor legate de gradul finit al acoperirii sugerau analogia cu funcțiile raționale. Pe de altă parte, trebuia determinată și o clasă de aplicații metrico-topologice.

Autorii se opresc asupra următorului concept general, pe care îl denumesc *aplicație cu distorsie mărginită*: Fie (X, d) și (Y, δ) spații metrice și M o constantă din $[1, \infty)$. Notînd

$$l(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\delta[f(x), f(y)]}{d(x, y)} \text{ și } L(x, y) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{\delta[f(x), f(y)]}{d(x, y)},$$

$x, y \in X$, aplicația continuă $f: X \rightarrow Y$ este cu distorsie mărginită, dacă $M^{-1} \leq l(x, f) \leq L(x, f) \leq M$. Pentru $n=2$, Martio, Rickman și Väisälä demonstraseră că o aplicație $f: S^2 \rightarrow S^2$ cu distorsie mărginită și deschisă este evasimeromorfă și local bilipschitziană pe $S^2 \setminus B_f$.

Cu aceste preliminarii, Martio și Srebro iau ca punct de plecare următoarele două forme ale teoremei de descompunere a lui Stoilow pentru o aplicație de acoperire ramificată $f: S^2 \rightarrow S^2$ (care în cazul $n=2$ este o transformare interioară arbitrară):

I. Există un homeomorfism $h: S^2 \rightarrow S^2$ și o funcție rațională $g: S^2 \rightarrow S^2$, astfel încît $f = g \circ h$.

II. Există homeomorfismul h și aplicația g cu distorsie mărginită, care păstrează orientarea, astfel încît $f = g \circ h$.

Aplicațiile model cu ajutorul cărora Martio și Srebro stabilesc o teoremă de descompunere sînt obținute de ei, plecînd de la funcții raționale (de fapt, după ideea preconizată de Stoilow în [49] și subliniată mai sus de a folosi funcții analitice de o variabilă complexă). Exemplul cel mai simplu fusese deja folosit în anii 60 de Church și Hemmingsen și reluat de Martio, Rickman și Väisälä (a se vedea p. 122 și p. 132). El constă din aplicația de înfășurare, cea mai apropiată de comportare locală a transformărilor interioare: $z \rightarrow z^k$ în $z=0$. Transporta-

rea teoriei pe sferă permite autorilor studiul transformărilor în vecinătatea unor tipuri importante de puncte de ramificare.

Pentru fiecare $t > 0$, $d_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ este omotetia $x \rightarrow tx$, $x \in \mathbb{R}^3$. Notînd cu $S^2(r)$ sfera de centru O și rază $r > 0$, cu $S^2 = S^2(1)$ și cu τ proiecția stereografică: $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$, ei numesc *aplicație rațională* orice aplicație $g = d_t \circ \tau \circ f \circ \tau^{-1} \circ d_t^{-1}: S^2(r) \rightarrow S^2(r)$, unde f este o funcție rațională pe $\hat{\mathbb{C}}$.

Prelungirea rațională $\hat{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, a aplicației raționale g este definită scriînd: $\hat{g}(tx) = tg(x)$ pentru $x \in S^2(r)$ și $t \in [0, \infty)$, și $\hat{g}(\infty) = \infty$. Ea este o aplicație de acoperire ramificată avînd mulțimile B_g , respectiv $\hat{g}B_g$, formate dintr-un număr finit de raze prin origine, care intersectează $S^2(r)$ în mulțimea finită de puncte B_g , respectiv gB_g . În cazul în care g corespunde funcției $f: z \rightarrow z^k$, se obține pe această cale aplicația de înfășurare pentru care B_g și $\hat{g}B_g$ sînt formate fiecare de o dreaptă prin origine.

Fuînd ca model aceste aplicații, Martio și Srebro dau următoarele definiții:

Fie $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație de acoperire ramificată. Mulțimea fB_f este *radială* (respectiv *liniară*) în $x_0 \in G$, dacă există o vecinătate V a lui x_0 și un homeomorfism $\varphi: f(V) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_0) \rightarrow 0$, astfel încît $\varphi[f(V \cap B_f)]$ să fie inclusă într-o reuniune finită de raze prin O (într-o dreaptă prin O). Analog se definește mulțimea B_f radială (respectiv liniară) în x_0 .

S-ar putea crede în primul moment că aplicațiile de acoperire ramificată f pentru care fB_f este liniară au o structură simplă a mulțimilor B_f și fB_f . Dar autorii construiesc un exemplu în care $f: B^3 \rightarrow B^3$, iar B_f și fB_f intersectează orice rază care pleacă din O în puncte oricît de apropiate de O .

După aceste pregătiri, Martio și Srebro obțin teoremele de comportare locale, care dau descompuneri Stoilow de tipul I:

Fie $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație de acoperire ramificată cu imaginea mulțimii de ramificare fB_f radială (liniară) în x_0 și $f(x_0) = 0$. Local în jurul lui x_0 , $f|_U = \hat{g} \circ h$ (respectiv $f|_U = G_k \circ h$), unde h este un homeomorfism al unei vecinătăți normale a lui x_0 , $U = U(x_0, f, r_0)$, dusă de f pe bila $B^3(r_0)$ de centru O și rază $r_0 > 0$, și anume $h: U \rightarrow B^3(r_0)$ cu $h(x_0) = 0$, iar $\hat{g}$ este prelungirea radială a unei aplicații raționale

$g: S^2(r_0) \rightarrow S^2(r_0)$, unic determinată pînă la o transformare Möbius (G_k este aplicația de înfășurare G_3, k). Gradul lui g , respectiv k , este indicele local al lui f în x_0 . Dacă $f(x_0) \neq 0$ în formula de descompunere apare încă un homeomorfism H , și anume $f|_U = H \circ \hat{g} \circ h$ (respectiv $f|_U = H \circ G_k \circ h$).

Privitor la descompuneri Stoilow de tipul II, autorii consideră aplicații evasimeromorfe $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ și introduc mulțimi fB_f (sau B_f) *evasiconform radiale* prin condiția ca homeomorfismul φ din definiția de mai sus să fie *evasiconform*. Dacă fB_f este *evasiconform radială* în x_0 rezultă că și B_f este *evasiconform radială* și se obține descompunerea $f|_U = H \circ \hat{g} \circ h$, unde h și H sînt homeomorfisme *evasiconforme*, iar $g: S^2 \rightarrow S^2$ o aplicație continuă cu distorsie mărginită, care păstrează orientarea.

Spațiul nu ne permite să adîncim în continuare acest memoriu atît de bogat în idei și exemple surprinzătoare. Vom aminti doar că el tratează și aplicațiile de acoperire ramificate pentru care $fr U = fr U(x_0, f, r)$ este 2-varietate, dacă $r \in (0, r_0]$ cu un r_0 convenabil, (stabilind între altele că în acest caz $fr U$ este topologic o sferă) pentru a sublinia astfel din nou o situație care apare în [49].

Remarcînd că teorema de descompunere a lui Stoilow nu afirmă nimic relativ la comportarea la frontieră, P. T. Church consideră în nota *Extensions of Stoilow's theorem* („J. London Math. Soc.”, **37** (1962), 86–89) o varietate cu bord V inclusă în sfera S^2 și o aplicație interioară $f: \text{int } V \rightarrow S^2$. Această aplicație se poate scrie $f = g \circ h$, unde h este un homeomorfism, iar g o funcție analitică. Un exemplu simplu, în care g este chiar aplicația identică, iar f un homeomorfism, care nu se prelungește la frontieră, arată că proprietățile la frontieră ale lui f și g sînt diferite. Church demonstrează însă teorema: Dacă f este o aplicație continuă a lui V în S^2 , iar restricția $f|_{\text{int } V}$ este deschisă, în timp ce $f(fr V) \neq S^2$, atunci în descompunerea $f = g \circ h$, aplicația h este continuă pe V și realizează un homeomorfism între $\text{int } V$ și $\text{int } h(V)$, iar g este continuă pe $h(V)$ și meromorfă pe $\text{int } h(V)$. Mai mult, dacă f este homeomorfism local pe $fr V$, atunci h este homeomorfism pe V . Rezultatul este precizat în ipoteza *evasiconformității*.

Vom analiza acum evoluția celui de al doilea concept fundamental datorat lui Simion Stoilow, *suprafața riemanniană*

de acoperire și, mai general, *acoperirea riemanniană și spațiul de acoperire*.

Prin opera sa profesorul Stoilow a influențat puternic dezvoltarea teoriei suprafețelor riemanniene.

Frontiera ideală a suprafețelor riemanniene deschise din monografia [39] a constituit punctul de plecare al unui mare număr de lucrări. Denumită de matematicienii japonezi (Noshiro, Ohtsuka, Kuroda, Kuramochi) *frontiera Kérékjártó-Stoilow*, ea este cunoscută azi pe baza tratatului de sinteză în teoria clasificării suprafețelor riemanniene a lui L. Sario și M. Nakai (*Classification theory*, Springer-Verlag, 1970) drept *frontiera Stoilow*. Adăugînd suprafeței riemanniene această frontieră se obține *compactificarea Stoilow* (spațiu Hausdorff compact, în care suprafața dată formează o mulțime densă, iar frontiera Stoilow o mulțime total discontinuă).

Studiind compactificarea spațiilor topologice, N. Boboc și Gh. Sirețchi au obținut caracterizarea funcțională a compactificării Stoilow, ca fiind — într-un anume sens — cea mai mare compactificare cu frontiera total discontinuă a spațiului considerat (în lucrarea *Sur la compactification d'un espace topologique*, „Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR” **5** (53), 3–4 (1961), 151–165).

Rolul de bază al frontierei Kérékjártó-Stoilow rezidă în faptul că frontierele conforme introduse ulterior: frontierele Martin, Kuramochi, Royden, Wiener sau Constantinescu-Cornea, apar ca rafinări ale ei.

În construirea teoriei frontierelor suprafețelor riemanniene Seminarul Stoilow a jucat un rol determinant.

Una dintre principalele contribuții se datorește lui Martin Jurchescu, care în teza sa de doctorat *Suprafețe riemanniene cu frontiera absolut discontinuă* (1956) și într-o serie de lucrări printre care *Modulus of boundary components* („Pacific J. Math.”, **8** (1958), 791–809) și *Bordered Riemann surfaces* („Math. Ann.”, **143** (1961), 264–292) a definit un concept nou: *modulul* unui element al frontierei Stoilow.

Acest concept completa în mod esențial *capacitatea* elementelor frontierei ideale introdusă de L. Sario în *Capacity of the boundary and of a boundary component* („Ann. of Math.” (2) **59**, 1 (1954), 135–144). El permitea formularea unui vast program de cercetare relativ la criteriile modulare de clasificare a suprafețelor riemanniene, pe care Jurchescu l-a înfăptuit

prin definirea unor noi clase remarcabile de suprafețe *clase modulare*, prin îmbinarea clasificării modulare cu alte criterii armonice și introducerea *claselor mixte*, prin rezolvarea completă a importante probleme de prelungire a suprafețelor riemanniene (1959).

În anii 1957—63 rezultate deosebit de importante fuseseră obținute în teoria clasificării suprafețelor riemanniene și a aplicațiilor analitice între aceste suprafețe de C. Constantinescu și A. Cornea.

Aceste rezultate au fost sintetizate în monografia *Ideale Ränder Riemannscher Flächen* (op. cit. la p. 111), carte deschizătoare de drumuri, prin care teoria frontierelor ideale a dobândit forma ei actuală, bazată pe un dublu principiu de dualitate. În această teorie funcționează, pe de o parte, dualitatea B (funcții mărginite), respectiv D (funcții cu integrala Dirichlet mărginită) și, pe de altă, dualitatea între frontiere cu structură simplă metrizabile (Martin și Kuramochi) și frontiere cu structură complicată, dar excelente instrumente de studiu al comportării funcțiilor la frontieră (frontiera Wiener introdusă de Constantinescu și Cornea, respectiv frontiera Royden). Cercetările lui Constantinescu și Cornea nu numai că au condus la noi clase de suprafețe, dar au extins numeroase teoreme clasice (Fatou, Riesz, Plesner, Beurling, Luzin-Privalov, Frostman-Nevanlinna) pentru aplicații analitice. Ei au studiat prelungirea funcțiilor analitice și armonice la elementele frontiere alături de alți matematicieni (O. Lehto, M. Heins, K. Oikawa etc.).

Relativ la aplicațiile analitice ale suprafețelor riemanniene, rezultate deosebit de originale au fost obținute de N. Boboc și Gh. Mocanu, care au introdus noțiunea de metrică armonică pe o suprafață riemanniană și au extins teorema lui Koebe la aceste aplicații („Bull. Math. Sci. Math. Phys. RPR”, 4, 1—2 (1961), 3—21). Nicu Boboc a definit convergența unghiulară în elementele frontiere ale unei suprafețe riemanniene și a generalizat astfel teorema lui Lindelöf („An. Univ. Timișoara, ser. mat.-fiz.”, 1 (1963), 47—50).

O etapă esențială pe calea acestor realizări a fost constituită de ciclul de expuneri din Seminarul Stoilow 1959—60, ținut de N. Boboc, C. Constantinescu, A. Cornea și M. Jurchescu, ciclu dedicat teoriei potențialului pe suprafețe riemanniene (a se vedea op. cit. la p. 111). Dincolo de faptul că acest

studiu a creat o bază profundă de tratare a problemelor relative la teoria suprafețelor riemanniene, însemnătatea sa este legată de orientarea ulterioară a cercetărilor lui N. Boboc, C. Constantinescu și A. Cornea către teoria potențialului, care a devenit astăzi unul dintre domeniile de vîrf ale matematicii românești. Teza de doctorat susținută de N. Boboc în 1961 constituia și ea o etapă în această evoluție. Ea aducea o amplă construcție a teoriei potențialului pe varietăți riemanniene (a se vedea și „Rev. Math. Pures Appl.”, 6, 3 (1961), 493—500). Colectivul format din N. Boboc, C. Constantinescu și A. Cornea, la care avea să se alăture ulterior P. Mustață (în probleme legate de operatori diferențiali) și Gh. Bucur (în legătură cu teoria conurilor convexe), a dezvoltat într-o serie vastă de lucrări fundamentale o întreagă teorie a potențialului, realizînd cea mai generală și completă axiomatizare a acestei teorii. În ultimii ani N. Boboc, Gh. Bucur și A. Cornea au construit cu ajutorul importante noțiuni de H -conuri (introduse de N. Boboc și A. Cornea în 1970) o nouă teorie a potențialului și au aprofundat aspectul funcțional al acestei teorii (a se vedea op. cit. la p. 111).

Am arătat mai sus că paralel cu clasificarea suprafețelor riemanniene abstracte, Simion Stoilow a urmărit construirea unei clasificări a suprafețelor riemanniene de acoperire și a introdus două clase importante de astfel de acoperiri.

Clasa suprafețelor riemanniene normal exhaustibile a fost studiată ulterior de G. T. Whyburn în memoriul din 1950, de Căbiria Andreian Cazacu în teza din 1955 și în diferite memorii între 1952—65, de T. Kuroda („Rev. Math. Pures Appl.”, 2 (1957), 239—244) și alții.

Un instrument fundamental în această direcție l-a constituit formula lui Hurwitz și generalizarea ei dată de Stoilow în [27] și [39], cap. VI. Considerînd cazul general al acoperirilor realizate de domenii poliedrice ale unei suprafețe riemanniene de acoperire, C. Andreian Cazacu a obținut în lucrarea *Über eine Formel von S. Stoilow* („Rev. Math. Pures Appl.”, 5, 1 (1960), 59—74) o formă generală a formulei Hurwitz-Stoilow, căreia i-a dat numeroase aplicații.

Pe calea deschisă de Stoilow prin definirea suprafețelor riemanniene normal exhaustibile, ea a introdus și studiat clase tot mai generale de acoperiri riemanniene:

— clasa acoperirilor parțial regulat exhaustibile, definite

plecând de la acoperirile parțial regulate ale lui Stoilow [39], cap. VI;

— în particular clasa acoperirilor E -cvasinormal exhaustibile, care include acoperirile lui T. Kuroda, suprafețele A_∞ ale lui L. I. Volkovski, suprafețele lui R. Osserman;

— acoperirile cvasitotal exhaustibile, analog topologic al acoperirilor regulat exhaustibile ale lui L. V. Ahlfors;

— acoperirile complete, de exemplu suprafețele lui S. Kobayashi, R. Nevanlinna, L. I. Volkovski.

Aceste clase se încadrează în următorul criteriu general de clasificare: a defini clase de acoperiri riemanniene deschise după proprietățile topologice sau metrice ale unei exhaustiuni. Clasele menționate mai sus au următoarea trăsătură comună, care permite considerarea lor dintr-un punct de vedere unitar. Ele sînt date printr-o exhaustiune cu domenii poliedrice (suprafețe bordate compacte) și de aceea pot fi numite *poliedral exhaustibile*. În memoriul *Clase de acoperiri riemanniene I și II* („An. Univ. București”, Sect. Mat.-Mec., 13, 2 (1964), 55—75 și 14, 1 (1965), 71—95), C. Andreian Cazacu a construit o teorie generală a acoperirilor riemanniene poliedral exhaustibile, a cărei importanță constă în faptul că orice acoperire riemanniană admite astfel de exhaustiuni.

Cea de a doua clasă de acoperiri riemanniene introdusă de Stoilow, clasa acoperirilor cu proprietatea (I) avea să formeze obiectul multor cercetări, dintre care vom cita în primul rînd lucrările lui M. Jurchescu. El a demonstrat proprietatea (I) pentru soluțiile ecuațiilor diferențiale $w' = G(z, w)$, unde G este o funcție meromorfă pe $\mathbb{C}^2$, obținînd astfel o vastă generalizare a teoremei lui Stoilow din [33] (*Asupra funcțiilor definite prin ecuații diferențiale nealgebrice* în „Bul. științ. Acad. R.P.R.”, Sect. Mat.-Fiz., 7 (1955), 347—354). Ulterior a stabilit același rezultat pentru ecuațiile $w'' = \sum_{j=0}^3 F_j(z, w) (w')^{3-j}$ cu F_j meromorfe în $\mathbb{C}^2$ (a se vedea [57], [59]—[61]).

Continuînd ideile lui Stoilow legate de introducerea clasei (I), M. Jurchescu urmărește construirea unei *clasificări relative* i.e. a unei clasificări a aplicațiilor olomorfe neconstante între suprafețe riemanniene arbitrare, definind alături de clasa (I) și de clasa (LBI) a lui M. Heins, o nouă clasă, aceea a aplicațiilor olomorfe ale căror frontiere accesibile sînt local

reuniuni numărabile de mulțimi polare. Această clasă este inclusă în clasa (LBI), care la rîndul ei este inclusă în clasa (I). Martin Jurchescu a construit astfel o teorie generală a ecuațiilor diferențiale $w'' = R(z, w, w')$, R funcție rațională de w' cu coeficienți funcții olomorfe de z și de w pe un deschis $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, mult mai cuprinzătoare decît tot ce s-a realizat în acest domeniu pe plan internațional („Stud. cercet. mat.”, 12 (1961), 575—590 și 14 (1963), 171—195, „C. R. Acad. Sci. Paris”, 256 (1963), 851—854, „Rev. Roumaine Math. Pures Appl.”, 9 (1964), 253—264).

Monografia lui K. Noshiro, *Cluster sets* (Springer-Verlag, 1960) aprofundează suprafețele riemanniene de acoperire cu proprietatea (I), prezentînd rezultatele lui Stoilow și îndeosebi principiul lui Stoilow de comportare la frontieră a funcțiilor cu proprietatea (I), [53], în lumina teoriei mulțimilor de valori limită: mulțimea valorilor limită într-un punct (element) al frontierei ideale Stoilow este fie totală, fie se reduce la un punct.

Un loc important îl ocupă principiul lui Stoilow și în monografia *Classification theory of Riemann surfaces* a lui L. Sario și M. Nakai (citată mai sus), cea mai importantă sinteză apărută pînă acum în acest domeniu. În capitolul VI al acestei monografii, Sario și Nakai prezintă forma localizată a principiului (i.e. forma corespunzătoare elementelor frontieră) și nu numai pentru suprafețe riemanniene deschise, dar și pentru suprafețe riemanniene bordate deschise. Se demonstrează totodată rezultatele lui Stoilow relativ la punctele acoperite de un număr finit de ori, la gradul acoperirii pe diferite domenii, la valorile asimptotice. Se arată apoi după T. Kuroda (1958) și K. Matsumoto (1963) pentru clasa de suprafețe riemanniene O_{A^2D} , respectiv după A. Mori, Z. Yûjôbô, K. Noshiro (1951) și T. Kuroda (1956) pentru clasa O_{A^2B} , că funcțiile MD^* (meromorfe cu integrala Dirichlet sferică finită), respectiv funcțiile M (meromorfe) au proprietatea (I), rezultatul fiind stabilit chiar într-o formă mai generală pentru funcții pe subdomenii bordate necompacte cu bord compact în primul caz, fără această condiție în al doilea. Se dau de asemenea teoreme de continuitate pe frontiera Stoilow pentru funcții din AD , respectiv MD^* (Matsumoto) și, în general, pentru acele funcții din AB care au proprietatea (I) localizabilă.

Conceptele introduse de Stoilow în legătură cu transformările interioare și cu acoperirile riemanniene s-au dovedit esențiale și în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, ele fiind de multe ori regăsite independent. În această teorie noțiunea generală de *spațiu de acoperire ramificată* apare prin lucrările lui H. Behnke și K. Stein, H. Grauert și R. Remmert, și K. Stein („Math. Ann.”, **124**, (1951), 1—16; **129**, (1955), 274—296; **132** (1956), 63—93), odată cu problema definirii spațiului analitic.

M. Jurchescu a supus această noțiune unei profunde analize, integrând-o în spiritul teoriei lui Stoilow (a se vedea *Spații de acoperire ramificate și proprietatea (I)* în volumul *Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie*, Iași, 1958, Ed. Academiei 1962, pp. 227—235. Iată definiția lui M. Jurchescu, care poate fi ușor comparată cu definiția pseudoacoperirilor lui Church și Hemmingsen (p. 123 de mai sus) sau cu definiția acoperirilor ramificate ale lui Martio și Srebro (p. 133 de mai sus).

Spațiile X și Y sînt separate, local-compacte, local-conexe, cu bază numărabilă, deci metrizabile; aplicația $f: X \rightarrow Y$ este continuă, 0-dimensională și oricare ar fi punctul $x \in X$, există o vecinătate conexă U a lui x , o vecinătate conexă V a lui $y=f(x)$ și o mulțime A nicăieri disconectantă în V , astfel încît $U \cap f^{-1}(A)$ este nicăieri disconectantă în U , iar $f|_{U \setminus f^{-1}(A)}$ este un homeomorfism local.

În aceste condiții, M. Jurchescu demonstrează următoarea propoziție de tipul celor stabilite de Stoilow:

Dacă D este un domeniu din Y și Δ o reuniune de componente conexe ale lui $f^{-1}(D)$ cu $\bar{\Delta}$ compact, atunci $f|_{\Delta}$ este proprie (deci închisă), și există o mulțime A nicăieri disconectantă în D și un număr finit k (gradul acoperirii lui D de către Δ), astfel încît cardinalul mulțimii $f^{-1}(y) \cap \Delta$ este k pentru orice $y \in D \setminus A$ și un număr depinzînd de y , strict pozitiv și $< k$, pentru orice $y \in A$.

După cum arătase și Stein în lucrarea din 1956 citată mai sus, spațiul de acoperire ramificat se încadrează în noțiunea de spațiu de acoperire definit de Stoilow [39], deoarece f este deschisă, deci transformare interioară.

M. Jurchescu introduce apoi în aceeași lucrare noțiunea generală de acoperire cu proprietatea (I):

Un spațiu de acoperire ramificată are această proprietate, dacă orice punct $y \in Y$ are vecinătăți arbitrare mici V , astfel încît pentru orice componentă conexă U a lui $f^{-1}(V)$, mulțimea $V \setminus f(U)$ este o mulțime frontieră a lui V .

El arată că pentru orice domeniu $V \subset Y$ și orice reuniune U de componente ale lui $f^{-1}(V)$, mulțimea $V \setminus f(U)$ este nicăieri disconectantă și extinde principiul lui Stoilow relativ la elementele frontieră ale lui X : mulțimea limită (pe care o definește conform lui Freudenthal cu ajutorul unui filtru dat de o bază analoagă sirurilor determinante ale lui Stoilow) este sau întreg spațiul Y , sau o mulțime nicăieri disconectantă în Y , păstrîndu-se dichotomia stabilită de Stoilow [53]. Dacă $n(f) = \sup_{y \in Y} \text{card } f^{-1}(y) = \infty$, există cel puțin un ele-

ment frontieră cu mulțimea limită Y .

În cazul în care spațiile X și Y sînt local-conexe prin arce, definiția acoperirilor cu proprietatea (I) de mai sus este echivalentă cu cea clasică de tip Stoilow, (p. 104 de mai sus), iar teoremele lui Jurchescu constituie extinderi ale rezultatelor acestuia.

Tot acoperirilor ramificate de varietăți, și anume de dimensiuni 2 sau 3, definite de transformări deschise cu grad finit cu anumite proprietăți, le este consacrat memoriul lui I. Berstein și A. L. Edmonds din „Trans. Amer. Math. Soc.”, **247** (1979), 87—124.

O altă frumoasă generalizare a teoriei lui Stoilow datorată lui M. Jurchescu se referă la teorema lui Stoilow de caracterizare topologică a suprafețelor riemanniene [30], [32], [39]:

O varietate 2-dimensională are bază numărabilă, dacă admite o transformare interioară în sferă.

În memoriul *Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume* („Math. Ann.”, **129** (1955), 233—259), H. Grauert a demonstrat o teoremă asemănătoare:

Un spațiu complex are topologie numărabilă, dacă admite o aplicație 0-dimensională olomorfă într-un $\mathbb{C}^N$.

El a dedus de aici proprietatea unui spațiu K -complet (i.e. spațiu complex, astfel încît pentru fiecare punct x al său există o aplicație olomorfă a întregului spațiu într-un $\mathbb{C}^N$, a cărei restricție la o vecinătate a lui x este 0-dimensională) de a avea topologie numărabilă.

Plecînd de la ideea demonstrației lui Stoilow, M. Jurchescu reușește să stabilească în lucrarea *On a theorem of*

Stoilow („Math. Ann.”, **138** (1959), 332–334) o teoremă generală cu caracter pur topologic, care evidențiază rolul aplicațiilor 0-dimensionale în această problemă:

Fie X un spațiu topologic conex, local conex, local compact și cu topologie local numărabilă, iar Y un spațiu cu topologie numărabilă. Dacă există o aplicație 0-dimensională $f : X \rightarrow Y$, spațiul X are topologie numărabilă.

Această teoremă include drept cazuri particulare cele două teoreme de mai sus a lui Stoilow și a lui Grauert și oferă o demonstrație simplă și naturală pentru teorema lui Grauert de numărabilitate a topologiei unui spațiu K -complet.

Teorema lui Stoilow discutată aici afirmă însă și faptul că orice varietate 2-dimensională triangulabilă și orientabilă admite o transformare interioară în sferă. În lucrarea *Sur la transformation intérieure d'une surface nonorientable dans le plan projectif* („Indag. Math.”, **56** (1953), 63–65), R. J. Wille a completat acest important rezultat:

Orice varietate 2-dimensională triangulabilă V (orientabilă sau nu) admite o transformare interioară $\varphi : V \rightarrow P$ în planul proiectiv real P .

Teoria a fost dezvoltată mai departe de unul dintre elevii lui Stoilow, I. Berstein în nota *Sur un problème de M. S. Stoilow* („C. R. Acad. Sci. Paris”, **242**, 24 (1956), 2796–2798), și anume:

Dacă V este orientabilă, φ factorizează prin acoperirea cu două foi $\sigma : S \rightarrow P$, care aplică dublul planului proiectiv, sfera S , neramificat și fără frontieră pe planul proiectiv P , i.e. există transformarea interioară $\Phi : V \rightarrow S$, astfel încât $\varphi = \sigma \circ \Phi$. Teorema se extinde înlocuind P cu o suprafață oarecare neorientabilă W și S cu dublul ei $\tilde{W}$.

Combinând acest rezultat, cu teorema sa, S. Stoilow a arătat în [65] că și pentru cazul V neorientabil se poate stabili un rezultat analog: Fie $\tilde{V}$ și $\tilde{W}$ dublele orientabile ale lui V , respectiv W , $\sigma : \tilde{W} \rightarrow W$ și $\tau : \tilde{V} \rightarrow V$ proiecțiile acestor acoperiri și $\varphi : V \rightarrow W$ o transformare interioară. Atunci există transformarea interioară $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$, astfel încât $\sigma \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau$. În aceeași lucrare, Stoilow ridică o serie de probleme relativ la organizarea suprafețelor neorientabile ca suprafețe Klein (i.e. suprafețe riemanniene neorientabile) pe baza transpor-

tării structurii cu ajutorul transformărilor interioare de pe suprafața de bază pe cea de acoperire.

Teorema lui Berstein se găsește — fără referire — în monografia lui N. L. Alling și N. Greenleaf, *Foundations of the theory of Klein surfaces* (Lecture Notes in Mathematics, **219**, Springer-Verlag, 1971). Zece ani mai târziu, în 1963 teorema lui Wille este regăsită prin metode de geometrie algebrică de W. D. Geyer (a se vedea *Berichte der Math. Forschungszentrum Oberwolfach, Algebraische Zahlentheorie*, **2**, 1964, 83–98) și mai departe lucrarea lui Geyer este luată ca punct de plecare de G. Martens („Archiv. der Math.”, **30**, 5 (1978), 481–486).

În ultimul timp, teoria funcțiilor pe suprafețe Klein a fost dezvoltată dintr-un punct de vedere original de I. Bărză, care în teza sa (1981) a introdus pe aceste suprafețe anumite clase de perechi de funcții, respectiv de forme diferențiale cu proprietăți remarcabile (a se vedea „Rev. Roumaine Math. Pures Appl.”, **25**, 4 (1980), 495–501) și *Surfaces de Riemann nonorientables*, Preprint Series in Mathematics, **21** (1981), INCREST, București). Tot el a stabilit pentru cazul neorientabil formula Hurwitz-Stoilow generalizată de C. Andreian Cazacu.

Revenind la teorema lui Stoilow de înzestrare cu structură conformă a suprafețelor pe baza existenței unei transformări interioare, vom aminti că recent, într-o lucrare profundă, R. Shima a stabilit încă o extensie: în ipoteze convenabile, dat un morfism de la o varietate topologică reală 4-dimensională V într-o varietate analitică complexă 2-dimensională W , există o structură complexă pe V , astfel încât morfismul să devină aplicație olomorfă.

La cel de al V-lea Seminar româno-finlandez de la București din 1981, K. Teleman și O. Dogaru au prezentat în expunerea *Sur une classe de faisceaux* clasificarea și calculul efectiv al coomologiei unei clase de fascicule cu aplicații în studiul transformărilor interioare.

Analiza prezentată mai sus a unora dintre cercetările care au dezvoltat din diferite puncte de vedere rezultatele lui Stoilow arată clar cât de puternică a fost și este încă influența operei sale asupra analizei complexe. Numele său, teoremele sale sînt citate și dezvoltate atît în monografiile consacrate teoriei suprafețelor riemanniene: R. Nevanlinna, *Uniformi-*

sierung (Springer-Verlag, [1953]; M. Schiffer și D. C. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces* (Princeton Univ. Press, 1954); G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces* (Addison-Wesley Publ., 1957); A. Pfluger, *Theorie der Riemannschen Flächen* (Springer-Verlag, 1957); L. V. Ahlfors și L. Sario, *Riemann surfaces* (Princeton Univ. Press, 1960), sau altele citate mai sus, cât și în manualele de teoria funcțiilor. Astfel, A. I. Markușevici în tratatul său *Teoria analiticeskih funkții* (Gos. izd. teh.-teor. lit., Moskva-Leningrad, 1950; Moskva, 1967-68 tradus în limba engleză 1965-67, 1977) expune amplu noțiunile de transformare interioară și suprafață riemanniană de acoperire. Stoilow este citat de B. V. Šabat în *Vvedenie v kompleksnii analiz* (Nauka, Moskva, 1969, 1976), A. T. Svesnikov și A. N. Tihonov în *Teoria funkții kompleksnoi peremennoi* (Nauka, Moskva, 1979), W. Rudin în *Real and complex analysis* (McGraw-Hill, New York, 1966, 1974), M. Heins în *Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable* (Holt, Rinehart, Winston, New York, 1962), A. F. Beardon în *Complex analysis* (J. Wiley and Sons, 1979), H. Behnke și F. Sommer în *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Springer-Verlag, 1955), R. B. Burckel în *An introduction to classical complex analysis* (Birkhäuser, 1979) etc.

Astăzi după o jumătate de veac de la introducerea noțiunii de transformare interioară, opera lui Simion Stoilow își păstrează întreaga importanță în cadrul matematicii.

Dacă analiticitatea constituie unul dintre conceptele matematice de bază, atunci explicarea naturii topologice a funcțiilor analitice se încadrează printre marile cuceriri ale științei. Iată de ce Brouwer socotea acest rezultat drept unul dintre cele mai frumose obținute în teoria funcțiilor în secolul nostru. Dar dincolo de semnificația filosofică a acestui rezultat și de numeroasele sale aplicații, dincolo de semnificația fundamentală a conceptelor de spațiu de acoperire și de suprafață riemanniană de acoperire, pe care matematica i le datorează, implicațiile adinci ale operei sale în unele din domeniile cele mai actuale și problemele importante ridicate de extinderea celebrelor sale teoreme, numărul impresionant de lucrări izvorite din aprofundarea rezultatelor sale stau mărturie a permanenței creației marelui nostru matematician.

Contribuții în teoria funcțiilor reale

Fără a avea amploarea și importanța rezultatelor obținute în teoria funcțiilor de variabilă complexă, cercetările întreprinse de Stoilow în teoria mulțimilor și a funcțiilor reale sînt deosebit de valoroase și de semnificative pentru înțelegerea personalității sale științifice. Le vom prezenta, în cele ce urmează, prin ceea ce au ele actual, subliniind ideile care merită să fie reluate de noile generații de matematicieni. Atenția principală va fi îndreptată asupra rezultatelor privind structura diferențială a funcțiilor continue. Este vorba, în mare măsură, de rezultate publicate în deceniul al treilea (a se vedea lucrările [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [16], [20], [23], [40], [56] din lista lucrărilor sale științifice). După aproape 60 de ani de la publicarea lor, putem spune că multe dintre aceste rezultate s-au încadrat, chiar dacă uneori cu întârziere și cu trudă, în linia centrală de dezvoltare a cercetărilor privind structura diferențială a funcțiilor reale; ele au fost aprofundate, ameliorate, precizate, generalizate, dar niciodată aruncate peste bord. O monografie ca aceea a lui Andrew M. Bruckner (*Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics, 659, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978) este semnificativă în acest sens, fiind cea mai completă și mai recentă în materie, datorită unuia dintre cei mai buni specialiști contemporani în domeniul în discuție. Această monografie, deosebit de selectivă, preia, dacă nu direct rezultatele lui Stoilow, cel puțin pe acelea ale continuatorilor lui Stoilow, continuatori despre care, dealtfel, va fi vorba pe larg în cele ce urmează.

O mare parte din capitolul de față va fi consacrat radiografiei unei teoreme a lui Stoilow, de a cărei însemnătate se vor convinge, sperăm, toți cititorii.

Rațiunile care ne-au determinat să întreprindem acest examen nu sînt însă numai de ordin strict matematic, ci țin de o perspectivă culturală și strategică mai largă, în care sînt angajate probleme grave privind comunicarea științifică internațională și, poate, și unele chestiuni de etică a cercetării științifice. Avem în vedere faptul că, deși rezultatele în discuție ale lui Stoilow au fost publicate într-o revistă de circulație internațională și de mare prestigiu în lumea matematică („Bulletin de la Société Mathématique de France“),

după ce în prealabil rezultatele fuseseră anunțate în nu mai puțin cunoscuta „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris“, ele au fost ignorate peste 30 de ani, timp în care diverși matematicieni au publicat diferite cazuri particulare ale teoremei lui Stoilow, fără a face nici o trimitere la lucrările acestuia, ca și cum aceste lucrări nu ar fi existat. După cum s-a arătat în cartea lui S. Marcus, *Din gândirea matematică românească* (Editura științifică și enciclopedică, 1975), un atare fenomen de frustrare a unui matematician român de prioritatea sa asupra unui important rezultat științific este departe de a fi fost un fenomen izolat. Rămâne deci să se reflecteze în continuare și să se adopte strategiile de rigoare (ținând, poate, și de o anumită politică a științei) pentru ca astfel de fenomene să nu se mai repete.

Înainte de a trece la discutarea contribuției centrale a lui Stoilow în domeniul analizei reale, vom menționa câteva idei care ar merita să fie reluate în perspectiva stadiului actual al matematicii. Să ne referim mai întâi la ciclul de lucrări consacrate clasificărilor mulțimilor de măsură nulă ([7], [8], [9]). Dezvoltând și depășind unele idei ale lui Borel, Stoilow introduce aici câteva modalități ingenioase de ierarhizare infinită a mulțimilor de măsură nulă (uni sau pluridimensionale). Între timp, după cum se știe, au apărut multe alte posibilități de a opera distincții între mulțimile de măsură nulă: avem în vedere teoria măsurilor de dimensiune fracționară, studii ca cele ale lui A. S. Bésicovitch, pentru a nu omite nici idei mai vechi ca cele ale lui Fréchet. Ar fi interesant de reluat clasificările lui Stoilow în lumina acestor dezvoltări fecunde ale analizei matematice, prelungite până prin deceniul al șaptelea al secolului nostru. Să nu uităm că domenii importante, de mare finețe, ale analizei matematice, cum ar fi teoria seriilor trigonometrice, depind în mare măsură de studiul anumitor clase de mulțimi perfecte, la rândul lor corelate cu diferite clase de mulțimi de măsură nulă. De asemenea, atât în analiza reală cât și în cea complexă tipologia mulțimilor neglijabile s-a diversificat atât de mult, încât astăzi ea nu se mai poate mulțumi cu cea existentă la începutul secolului.

Demne de a fi reconsiderate în perspectiva atîtor idei moderne sînt și articolele [14] și [19] privind distincția dintre punctele singulare de prima și cele de a doua și a treia speță

într-o transformare continuă de mai multe variabile. Interesant, pentru tranziția intereselor autorului dinspre real spre complex, este articolul [16], unde transformările interioare apar drept acele transformări pe care Banach le-a numit cu *variație mărginită* în studiul său asupra rectificabilității curbelor și ariei suprafețelor. În [20], Stoilow stabilește, pentru orice funcție continuă, existența unui număr infinit de puncte în care există fie o derivată laterală infinită, fie o derivată printr-o mulțime perfectă de indice unu în punctul considerat. Asupra ameliorărilor ulterioare ale acestui rezultat, a se vedea cartea menționată a lui A. M. Bruckner.

Articolul [52] prezintă o însemnătate didactică deosebită: se arată aici modul în care cea mai intuitivă reprezentare a numerelor, cea zecimală, poate fi punctul de plecare al unei dezvoltări riguroase a conceptului de număr real. Ne întrebăm dacă aceste idei n-ar putea fi valorificate chiar la nivelul învățămîntului liceal.

Să remarcăm, în sfîrșit, studiul de finețe dedicat convergenței continue a lui Hans Hahn [56]. Un șir $\{f_n\}$ de funcții reale sau complexe definite pe un spațiu metric X este continuu convergent în $x_0 \in X$ dacă pentru orice $x_n \in X$ ($n=1, 2, \dots$) astfel încît $\lim x_n = x_0$ există un număr real $f(x_0)$ care nu depinde de șirul $\{x_n\}$, astfel încît $\lim f_n(x_n) = f(x_0)$. Se știe că dacă X este compact iar funcțiile f_n sînt continue în X atunci convergența continuă pe X este echivalentă cu convergența uniformă pe X . Stoilow își îndreaptă atenția asupra cazului în care X nu este neapărat compact iar funcțiile f_n nu sînt continue, obținînd rezultate de o simplitate și profunzime cu adevărat clasice. Iată o cercetare care poate constitui punctul de plecare pentru noi investigații, chiar la nivelul cunoștințelor de analiză matematică din primii doi ani de facultate.

Pînă la începutul secolului nostru se cunoșteau două feluri de proprietăți punctuale pe care o funcție le poate avea în domeniul ei de definiție: proprietăți locale, care au loc în *anumite* puncte, și proprietăți globale, care au loc în *toate* punctele din domeniul de definiție. Se știa, de exemplu, că o funcție derivabilă pe $[a, b]$ este continuă în toate punctele din $[a, b]$, în timp ce o funcție continuă pe $[a, b]$ poate fi derivabilă în unele puncte și nederivabilă în alte puncte din $[a, b]$. Dar încă din secolul trecut, odată

cu studiul seriilor trigonometrice, se constatare că mulțimea punctelor în care are loc o anumită proprietate poate prezenta o structură complicată (mulțimea punctelor de convergență ale unei serii trigonometrice, mulțimea punctelor de continuitate ale unei funcții integrabile etc.), fapt care a constituit un puternic impuls pentru dezvoltarea teoriei mulțimilor. Începutul secolului nostru avea să promoveze un nou punct de vedere în studiul funcțiilor, cel legat de considerarea mulțimilor neglijabile. Între proprietățile care au loc doar într-un punct sau în câteva puncte și cele care au loc în toate punctele de definiție ale unei funcții există o situație intermediară: aceea în care o funcție posedă o anumită proprietate în fiecare punct în care ea este definită, *cu excepția unei anumite mulțimi neglijabile*. Nu este vorba aici de o simplă apreciere psihologică; caracterul neglijabil urma să fie precizat în mod riguros, după un criteriu de întindere, de cardinalitate, de categorie Baire sau de altă natură. Fiecare problemă își are clasa ei de mulțimi neglijabile. O experiență de 80 de ani a arătat că o clasă de mulțimi neglijabile este de obicei o clasă ereditară și numărabil aditivă de mulțimi. Cele mai importante clase de acest fel sînt: clasa mulțimilor cel mult numărabile, clasa mulțimilor de măsură Lebesgue nulă și clasa mulțimilor de prima categorie Baire. Fiind dată o clasă $\mathcal{F}$ de funcții definite pe $[a, b]$, ei i se pot asocia de obicei o proprietate P și o clasă $\mathcal{U}$ de mulțimi neglijabile, cu proprietatea că pentru fiecare funcție f din $\mathcal{F}$ există o mulțime A în $\mathcal{U}$ astfel încît în orice punct din afara lui A funcția f posedă proprietatea P . În cadrul celor mai multe clase de funcții lucrurile se desfășoară în așa fel încît structura funcțiilor din clasă poate prezenta și unele aspecte mai complicate, dar aceste complicații sînt îngrămădite pe o mulțime neglijabilă dintr-un anumit punct de vedere. Situația aceasta amintește de unele jocuri ale copiilor, cărora li se propune ca, așezînd un desen într-un mod adecvat, să observe anumite obiecte, animale sau persoane care nu sînt observabile la o așezare întîmplătoare a desenului. Așezînd intervalul de definiție al funcțiilor dintr-o anumită clasă într-un mod adecvat — adică sub forma unei descompuneri convenabile într-o mulțime neglijabilă și complementara acesteia — va apărea pe aceasta din urmă o proprietate care nu are loc pe întregul interval de definiție. Iată trei exemple, care sînt tot altele teoreme clasice ale ana-

lizei matematice. Fiecărei funcții monotone pe intervalul $[a, b]$ i se asociază o mulțime cel mult numărabilă A , astfel încît în orice punct din $[a, b] - A$ funcția este continuă. Fiecărei funcții cu variație mărginită pe $[a, b]$ i se asociază o mulțime B de măsură Lebesgue nulă, astfel încît în orice punct din $[a, b] - B$ funcția este derivabilă. Fiecărei funcții de prima clasă Baire i se asociază o mulțime C de prima categorie Baire, astfel încît în orice punct din $[a, b] - C$ funcția este continuă. Primele două teoreme sînt datorate lui Henri Lebesgue, în timp ce ultima teoremă a fost stabilită de către René Baire.

Toate aceste rezultate sînt cunoscute încă din primul deceniu al secolului nostru. De atunci s-au acumulat un număr mare de teoreme de acest fel, iar natura mulțimilor neglijabile s-a diversificat și ea.

Primele decenii ale secolului nostru au adus însă în atenția matematicienilor și un alt tip de mulțimi neglijabile. Acestea nu mai sînt situate în domeniul de definiție al funcției, ci în domeniul valorilor ei. Primele rezultate de acest fel sînt datorate lui Sierpiński și Luzin. Teorema lui Sierpiński afirmă că mulțimea valorilor luate de o funcție oarecare în punctele ei de extremum (strict sau nu) este cel mult numărabilă; cu alte cuvinte, pentru orice funcție $f: R \rightarrow R$, există o mulțime A cel mult numărabilă, conținută în R , astfel încît, oricare ar fi punctul x pentru care $f(x)$ nu aparține lui A , x nu este un punct de extremum pentru f . Teorema lui Luzin afirmă că valorile pe care o funcție continuă le ia în punctele în care derivata ei se anulează formează o mulțime de măsură Lebesgue nulă.

Teoremele lui Sierpiński și Luzin inaugurează deci un nou tip de mulțimi neglijabile, situate nu în domeniul de definiție, ci în cel al valorilor funcției. Teorema lui Sierpiński este de fapt o simplă observație, la îndemîna azi oricărui student, ea revenind la faptul că o familie de intervale disjuncte două câte două este obligatoriu cel mult numărabilă. Teorema lui Luzin corespunde și ea așteptărilor, fiind o prelungire a teoremei clasice conform căreia o funcție a cărei derivată este identic nulă în $[a, b]$ este constantă în $[a, b]$. Prima teoremă de anvergură în care mulțimea neglijabilă este situată în domeniul valorilor și care reușește să pună în evidență o simplificare surprinzătoare a raporturilor dintre

numerele derivate ale unei funcții continue, în toate punctele în care funcția ia valori care nu aparțin mulțimii neglijabile, a fost obținută de Simion Stoilow în anul 1924. Înainte de a enunța această teoremă, vom aminti că pentru orice valoare a a unei funcții continue mulțimea $\{x; f(x)=a\}$ este închisă. Punctele unei mulțimi liniare (închise) sînt de două feluri: de prima specie, dacă există un interval deschis, cu extremitatea în punctul considerat, conținut în complementara mulțimii și de a doua specie în cazul contrar. Printre punctele de prima specie pot exista și puncte izolate în mulțimea închisă considerată.

Iată acum enunțul teoremei lui Stoilow:

Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$, cu valori reale. Există o mulțime reală A , de măsură Lebesgue nulă, astfel încît, pentru orice număr ξ care nu aparține lui A , are loc următoarea situație: În fiecare punct de prima specie al mulțimii $L_\xi = \{x; f(x)=\xi\}$ numărul derivat inferior la stînga este egal cu numărul derivat superior la dreapta, iar numărul derivat superior la stînga este egal cu numărul derivat inferior la dreapta. În fiecare punct izolat al mulțimii L_ξ funcția f admite derivată (deci cele patru numere derivate coincid). Dacă numerele derivate de o aceeași parte sînt mărginite în punctele mulțimii L_ξ (această parte putînd varia de la un punct la altul, deci fiind cînd stînga, cînd dreapta) atunci L_ξ este o mulțime finită; dacă aceste numere derivate sînt doar finite, atunci L_ξ este o mulțime cel mult numărabilă.

Singurul instrument folosit de Stoilow pentru a obține această teoremă este teorema lui Lebesgue asupra derivabilității funcțiilor monotone. Teorema lui Stoilow pune în evidență o simplitate remarcabilă în comportarea unei funcții continue, în orice punct în care ia o valoare care nu aparține mulțimii neglijabile asociate. Pentru a aprecia această simplitate, este suficient să evaluăm numărul extraordinar de mare de posibilități combinatorii în ceea ce privește situația reciprocă a celor patru numere derivate, posibilități îngrămădite însă pe o mulțime a cărei imagine prin f este de măsură nulă; în celelalte puncte, o selecție riguroasă reține doar cîteva situații, care, în ipoteze foarte largi, obligă mulțimile de nivel să fie finite sau numărabile.

Din teorema sa, Stoilow deduce cu ușurință o teoremă a lui Saks, care generalizează teorema lui Luzin de mai sus

și care afirmă că valorile pe care o funcție continuă le ia în punctele în care cel puțin un număr derivat este egal cu zero formează o mulțime de măsură nulă. Dar mai deduce și o altă teoremă, mult mai importantă, care în acel moment domina teoria funcțiilor de o variabilă reală; teorema lui Denjoy asupra situației numerelor derivate ale unei funcții continue. Iată enunțul teoremei lui Denjoy: Fiind dată o funcție f continuă pe $[a, b]$, cu valori reale, există o mulțime A conținută în $[a, b]$, de măsură Lebesgue nulă, astfel încît în orice punct care nu aparține lui A două numere derivate asociate (adică de aceeași parte a punctului) sînt sau egale și finite sau diferite, unul cel puțin fiind infinit; două numere derivate opuse (adică cel inferior la stînga și cel superior la dreapta sau cel superior la stînga și cel inferior la dreapta) sînt sau finite și egale sau amîndouă infinite, dar de semn diferit.

Este interesant să observăm și analogiile, dar și deosebirile dintre teorema lui Denjoy și cea a lui Stoilow. Amîndouă se referă la situația numerelor derivate ale unei funcții continue și amîndouă pun în evidență o simplificare care se produce de îndată ce se înlătură o mulțime de măsură nulă. Dar în timp ce în teorema lui Denjoy această mulțime neglijabilă este situată în intervalul de definiție al funcției, în teorema lui Stoilow ea este o parte din mulțimea valorilor funcției. Mai important ni se pare faptul că simplificările puse în evidență de teorema lui Stoilow în complementara mulțimii neglijabile sînt mai mari și de o natură mai structurală decît simplificările corespunzătoare din teorema lui Denjoy. În această din urmă teoremă este vorba de o descriere atomistică, deci esențialmente punctuală, a comportării numerelor derivate pe complementara mulțimii neglijabile, în timp ce în teorema lui Stoilow se descrie comportarea numerelor derivate în termeni de mulțimi de nivel, indicîndu-se totodată cazuri precise în care aceste mulțimi de nivel sînt finite sau numărabile.

Faptul că teorema lui Denjoy poate fi dedusă din teorema lui Stoilow nu constituie un lucru senzațional, dacă ținem seama că fiecare dintre ele a fost stabilită cu ajutorul teoremei lui Lebesgue, privind derivabilitatea funcțiilor monotone. Rămîne în orice caz probată în acest fel posibilitatea de a așeza teorema lui Stoilow la baza teoreme-

lor de derivare în care mulțimile neglijabile sînt situate în domeniul de definiție al funcției. Ceea ce ni se pare mai important este faptul că *teorema lui Stoilow constituie obîrșia comună a unui întreg șir de teoreme astăzi clasice, dar obținute ulterior teoremei lui Stoilow și fără ca autorii lor să se fi prevalat de ea*. Vom prezenta în cele ce urmează această situație bizară, în care mai mulți matematicieni de seamă, ca Banach, Saks și Minakshisundaram, au putut să-și complice căile de acces la niște rezultate pe care teorema lui Stoilow le implica într-un mod simplu și elegant. Lucrul este cu atît mai de mirare cît teorema lui Stoilow a fost publicată în două reviste de mare circulație: „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris” (în 1924) și „Bulletin de la Société Mathématique de France” (în 1925). Am semnalat toate acestea încă în 1957, în volumul omagial dedicat lui Simion Stoilow, cu prilejul celei de a 70-a aniversări. Încă atunci am exprimat posibilitatea de a desprinde din teorema lui Stoilow consecințe mult mai puternice decît cele pe care le-am putut degaja și care nu utilizează din teorema în discuție decît faptul că în fiecare punct izolat al unei mulțimi de nivel neexcepționale există derivată. Probabil că o bună parte din capitolul IX al cărții lui Saks *Theory of the integral* poate fi clădită pe teorema în discuție a lui Stoilow.

Vom nota cu A mulțimea neglijabilă din teorema lui Stoilow.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_1 , dacă valorile pe care f le ia de o infinitate de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a demonstrat în 1931 (deci la șapte ani după publicarea teoremei lui Stoilow) următorul rezultat: O condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție f continuă să satisfacă condiția T_1 este ca valorile pe care f le ia în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulțime de măsură nulă.

Să regăsim acest rezultat cu ajutorul teoremei lui Stoilow. Să stabilim mai întîi necesitatea condiției. Fie ξ o valoare care nu aparține lui A și care este luată de f doar într-un număr finit de puncte. Mulțimea $\{x; f(x)=\xi\}$ este deci formată exclusiv din puncte izolate. Rezultă, în virtutea teoremei lui Stoilow, că f are derivată în fiecare punct din L_ξ . Orice valoare luată de f într-un punct în care nu are derivată este deci o valoare luată de o infinitate de ori. Însă astfel de valori for-

mează, prin ipoteză, o mulțime de măsură nulă. Condiția este deci necesară. În ceea ce privește suficiența condiției, ea este imediată, dacă ținem seama de teorema lui Luzin, despre care a fost vorba mai sus. Deoarece din teorema lui Stoilow rezultă o teoremă care generalizează teorema lui Luzin (așa cum am semnalat mai sus), putem spune că și suficiența condiției rezultă din teorema lui Stoilow. Teorema lui Saks este astfel complet demonstrată.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_2 , dacă valorile luate de f de o infinitate nenumărabilă de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a stabilit în 1931 teorema următoare: Dacă f satisface pe $[a, b]$ condiția T_2 , atunci $-\mu(f(N)) \leq f(b) - f(a) \leq \mu(f(P))$, unde P , respectiv N , reprezintă mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care f admite derivată nenegativă, respectiv nepozitivă, iar μ reprezintă măsura Lebesgue. Mulțimea $D = P \cup N$ este nenumărabilă, cel puțin una dintre mulțimile $f(P)$, $f(N)$ fiind de măsură pozitivă (a se vedea și pp. 280—281 din monografia menționată a lui Saks, din 1937).

Din teorema lui Stoilow nu numai că putem regăsi această teoremă a lui Saks, dar putem deduce și următorul rezultat mai puternic: Fie f continuă și satisfăcînd condiția T_2 pe $[a, b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care f are derivată (finită sau infinită). În aceste condiții, mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă. (Prin m și M am notat marginile inferioară și superioară ale lui f pe $[a, b]$). Pentru demonstrație, să notăm cu B mulțimea de măsură nulă a valorilor pe care f le ia de o infinitate nenumărabilă de ori. Fie ξ un număr care nu aparține mulțimii $A \cup B$. Mulțimea L_ξ fiind închisă și numărabilă, conține un punct izolat x_0 . Conform teoremei lui Stoilow, f admite o derivată unică (finită sau infinită) în x_0 , deci x_0 aparține lui D , iar mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Să observăm că de fapt avem următorul rezultat mai general: Dacă, exceptînd o mulțime de măsură nulă de nivele, fiecare nivel al unei funcții continue f conține un punct izolat, atunci mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Se spune, după Luzin, că funcția f are proprietatea N , dacă imaginea, prin f , a oricărei mulțimi de măsură nulă este de asemenea o mulțime de măsură nulă. Rezultatul pe

care tocmai l-am obținut ne permite să regăsim și să întărim o remarcabilă teoremă dată de Banach în 1926: Pentru orice funcție continuă, cu proprietatea N , punctele de derivabilitate formează o mulțime de măsură strict pozitivă. Față de această teoremă a lui Banach, vom stabili următoarea întărire a teoremei lui Banach: Dacă f este continuă și are proprietatea N pe $[a, b]$ atunci, notînd cu V mulțimea valorilor lui f în punctele de derivabilitate, mulțimea $[m, M] - V$ este de măsură nulă. Pentru demonstrație, să amintim că o funcție continuă, cu proprietatea N , satisface condiția T_2 (rezultat stabilit de Banach în 1926) deci, în conformitate cu rezultatul pe care tocmai l-am obținut, mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă. Să notăm cu F mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui f . Se știe că mulțimea $D - F$ este de măsură nulă. În virtutea proprietății N a lui f , mulțimea $f(D - F)$ va fi de asemenea de măsură nulă. Rezultă că mulțimea $[m, M] - V$ este de măsură nulă.

Vom mai fructifica o dată teorema lui Stoilow, pentru a obține o întărire a următoarei teoreme date de Minakshisundaram în 1940: Dacă f este continuă și nederivabilă în fiecare punct din $[a, b]$, atunci există o mulțime E de măsură nulă în $[m, M]$, astfel încît, pentru orice $\xi \in [m, M] - E$, mulțimea L_ξ este nevidă, perfectă și nicăieri densă. Iată rezultatul pe care-l vom deduce din teorema lui Stoilow: Dacă valorile pe care o funcție continuă f le ia în punctele în care derivata există (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă, atunci există o mulțime E de măsură nulă astfel încît, pentru orice $\xi \in [m, M] - E$, mulțimea L_ξ este nevidă, perfectă și nicăieri densă. Într-adevăr, în cazul contrar mulțimea L_ξ ar conține un punct izolat, deci un punct în care ar exista derivata. Însă, conform ipotezei, aceasta este posibil numai pentru o mulțime de măsură nulă de valori ξ . În plus, este evident că pentru orice funcție f continuă mulțimea L_ξ este nicăieri densă, cu excepția unei mulțimi numărabile de valori ξ .

Trei lucruri sînt de observat pe marginea considerațiilor de mai sus:

a) Teorema lui Stoilow a permis o unificare a unor rezultate care altfel apăreau dispartate, sursa lor comună fiind chiar teorema lui Stoilow.

b) În cazul teoremelor lui Banach, Minakshisundaram și cea de a doua teoremă a lui Saks, teorema lui Stoilow nu

numai că a permis regăsirea lor, dar a condus la ameliorarea lor sensibilă.

c) De fiecare dată, rezultatele au fost obținute pe o cale rapidă, care contrastează cu demonstrațiile laborioase propuse de autorii teoremelor în cauză, ulterior teoremei lui Stoilow. În fapt, fiecare dintre aceste demonstrații a refăcut într-un fel sau altul, un raționament sau un fapt care se aflau deja implicate în demersul lui Stoilow.

Dacă mai adăugăm la toate acestea și faptul deja remarcant, că în toate raționamentele de mai sus nu s-a utilizat decît o mică parte din teorema lui Stoilow (cea relativă la punctele izolate ale mulțimilor de nivel), ne dăm seama de impactul ei deosebit asupra teoriei funcțiilor reale.

Această situație m-a determinat în 1958 să propun lui Marius Iosifescu, pe atunci student în ultimul an, astăzi eminent matematician, de a întreprinde un examen critic al întregii situații pe care o prezenta teorema în discuție. Rezultatul obținut de Marius Iosifescu mărește considerabil impactul teoremei lui Stoilow, dîndu-i acesteia o ameliorare pe care nu o putem numi altfel decît teorema Stoilow-Iosifescu și care constă în validitatea teoremei lui Stoilow în ipoteza că funcția în cauză satisface doar proprietatea lui Darboux (se știe că această proprietate este implicată de proprietatea de continuitate, dar nu și reciproc). Mai precis, înlocuind în enunțul teoremei lui Stoilow cuvîntul *continuă* prin cuvintele *cu proprietatea lui Darboux*, teorema rămîne adevărată. Precizăm însă că avem aici în vedere numai prima parte din teorema lui Stoilow, aceea care se referă la punctele de prima specie și la puncte izolate, nu și partea a doua, care dă condiții suficiente ca o mulțime de nivel să fie finită sau numărabilă. Comportarea acestei ultime părți din teorema lui Stoilow în raport cu înlocuirea proprietății de continuitate cu o proprietate mai generală ar merita să facă obiectul unor investigații ulterioare. Ideea lui Iosifescu constă în a degaja ceea ce el numește proprietatea (m) . O funcție f are această proprietate într-un mod unilateral într-un punct x_0 dacă, de o parte a lui x_0 , pe un segment convenabil ales cu o extremitate în x_0 , avem sau numai $f(x) > f(x_0)$, sau numai $f(x) < f(x_0)$. Funcția f are proprietatea (m) într-un mod bilateral în x_0 , dacă, de o parte și de alta a lui x_0 , pe segmente convenabil alese cu o extremitate în x_0 , avem sau

numai $f(x) < f(x_0)$ sau numai $f(x) > f(x_0)$. Se observă ușor că proprietatea (m) unilaterală poate avea loc numai în punctele de prima specie ale mulțimilor de nivel, iar proprietatea (m) bilaterală numai în punctele izolate ale mulțimilor de nivel. Iosifescu stabilește mai întâi o variantă a teoremei lui Stoilow pentru funcții arbitrare, variantă în care punctele de prima specie în raport cu o mulțime de nivel sînt înlocuite prin puncte cu proprietatea (m) în raport cu o astfel de mulțime, iar mulțimea neglijabilă este transferată în intervalul de definiție al funcției. Anume, el arată că oricare ar fi funcția reală f definită pe $[a, b]$, există două mulțimi Z și W de măsură nulă în $[a, b]$ astfel încît în orice punct din $[a, b] - Z$ în care f are proprietatea (m) unilaterală există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - Z$ în care f are proprietatea (m) bilaterală există derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a, b] - W$ în care f are proprietatea (m) unilaterală există un număr derivat finit care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - W$ în care f are proprietatea (m) bilaterală există o derivată unică finită. Un caz remarcabil în care are loc proprietatea (m) se dovedește a fi tocmai cel al funcțiilor cu proprietatea lui Darboux, unde proprietatea (m) unilaterală are loc exact în punctele de prima specie în mulțimile lor de nivel, iar proprietatea (m) bilaterală are loc exact în punctele izolate în mulțimile lor de nivel. Faptul acesta îl conduce imediat pe Iosifescu la următoarea teoremă: Fie f o funcție cu proprietatea lui Darboux în $[a, b]$. Există două mulțimi Z și W de măsură nulă, astfel încît: în orice punct din $[a, b] - Z$, de prima specie în mulțimea sa de nivel, există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - Z$, izolat în mulțimea sa de nivel, există o derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a, b] - W$, de prima specie în mulțimea sa de nivel, există un număr derivat finit, care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a, b] - W$, izolat în mulțimea sa de nivel, există o derivată unică finită.

Observăm că partea din această teoremă care se referă la mulțimea neglijabilă Z diferă de teorema lui Stoilow doar prin două elemente: continuitatea funcției a fost înlocuită cu proprietatea lui Darboux, iar mulțimea neglijabilă, de

măsură nulă, a coborît din mulțimea valorilor în intervalul de definiție al funcției. Lucrurile se desfășoară ca și cum, la întrebarea: Se poate extinde teorema lui Stoilow de la funcții continue la funcții cu proprietatea lui Darboux? obținem răspunsul: Da, cu condiția ca mulțimea neglijabilă să fie transferată în intervalul de definiție. Acest transfer este „plata” care ni se cere, deocamdată, pentru efectuarea extensiunii propuse. Dar pentru această plată obținem, în plus, și o variantă „de finitudine” a teoremei lui Stoilow, o variantă care arată că prin efectuarea transferului în discuție ne putem aranja în așa fel încît toate numerele derivate despre care este vorba în teorema lui Stoilow să fie finite; este exact ceea ce se întîmplă în partea a doua a teoremei lui Iosifescu de mai sus, adică partea care se referă la mulțimea neglijabilă W .

Să ne permitem o mică digresiune și să considerăm cazul particular al unei funcții cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt, toate, discrete. Aceasta înseamnă că orice punct din $[a, b]$ este izolat în mulțimea sa de nivel, deci, conform teoremei de mai sus (ultima parte relativă la mulțimea neglijabilă W), funcția considerată este derivabilă aproape peste tot. Se regăsește astfel o teoremă dată de A. Marchaud, în 1933, pentru funcții continue, și extinsă de noi, în 1957, la funcții cu proprietatea lui Darboux. Dar, după cum arată Marius Iosifescu, rezultatul nostru poate fi la rîndul său ameliorat, observîndu-se că mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt discrete, nu este doar de măsură nulă, ci chiar numărabilă. Un rol esențial în stabilirea acestui fapt îl joacă faptul că o funcție cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulțimi de nivel sînt discrete, are în orice punct proprietatea (m) bilaterală.

Sîntem acum în măsură să prezentăm extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow, adică să arătăm că acel preț pe care l-am plătit pentru a putea înlocui în enunțul teoremei lui Stoilow cuvintele „funcție continuă” prin „funcție cu proprietatea lui Darboux” nu este obligatoriu. Cu alte cuvinte, referindu-ne la funcții cu proprietatea lui Darboux, putem aduce mulțimea neglijabilă de măsură nulă înapoi în mulțimea valorilor funcției, fără a afecta celelalte prevederi din teorema lui Stoilow. Vom vedea totuși că ceva se pierde; partea „de finitudine”, relativă la mulțimea neglijabilă w nu

va mai putea fi salvată prin readucerea mulțimii neglijabile în mulțimea valorilor funcției.

Vom avea mai întâi nevoie de o leamnă: Dacă φ este o funcție monotonă pe $[a, b]$, iar N_φ este mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care φ nu admite derivată (finită sau infinită), atunci măsura Lebesgue a mulțimii $\varphi(N_\varphi)$ este egală cu zero. Pentru demonstrație, să observăm mai întâi că este suficient să ne referim la funcții strict monotone — de exemplu, strict crescătoare. Într-adevăr, dacă φ ar fi crescătoare într-un mod nestrict, funcția ψ dată de $\psi(x) = \varphi(x) + x$ ar fi strict crescătoare și, admitând că lema a fost stabilită în acest din urmă caz, ar rezulta că $\mu(\psi(N_\psi)) = 0$ (prin μ notăm măsura Lebesgue). Însă $N_\psi = N_\varphi$ și $\psi(x_2) - \psi(x_1) > \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ pentru $x_2 > x_1$, deci $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$. Rămâne deci să stabilim lema pentru φ strict crescătoare. Notînd cu φ^{-1} inversa lui φ , definită pe $\varphi([a, b])$, avem $N_{\varphi^{-1}} \supseteq \varphi(N_\varphi)$ (convenim ca punctele din $\varphi([a, b])$ în care mulțimea $\varphi([a, b])$ nu se acumulează bilateral să fie considerate puncte în care φ^{-1} nu admite derivată — finită sau infinită; mulțimea acestor puncte este cel mult numărabilă). Însă φ^{-1} este și ea monotonă, deci $\mu(N_{\varphi^{-1}}) = 0$ (în virtutea teoremei lui Lebesgue), deci cu atît mai mult, în baza incluziunii de mai sus, avem $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$ și lema este complet demonstrată.

Pentru a obține acum extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow vom mai avea nevoie de o noțiune: aceea de traiectorie monotonă asociată unei funcții f într-un punct rațional r din intervalul ei de definiție. Asociind lui f în r funcțiile:

$$f^+(x) = \sup_{y \in [r, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leq x < b;$$

$$f_+(x) = \inf_{y \in [r, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leq x < b;$$

$$f^-(x) = \sup_{y \in [x, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leq r;$$

$$f_-(x) = \inf_{y \in [x, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leq r,$$

vom numi aceste funcții (evident monotone: prima și a treia monoton crescătoare, iar a doua și a patra monoton descrescătoare) *traiectoriile monotone asociate funcției f în*

punctul rațional r . Deoarece mulțimea punctelor raționale din $[a, b]$ este numărabilă, rezultă că oricărei funcții i se asociază o familie numărabilă de traiectorii monotone.

Analiza întreprinsă de Iosifescu arată că mulțimea neglijabilă Z din teorema sa de mai sus relativă la funcții cu proprietatea lui Darboux se obține ca reuniune a mulțimii E_f a punctelor de extremum strict ale lui f (mulțime care este totdeauna cel mult numărabilă) cu reuniunea numărabilă a mulțimilor $N_i (i=1, 2, \dots)$ definite în modul următor: notînd cu $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ șirul numerelor raționale din $[a, b]$, N_i este mulțimea tuturor punctelor din $[a, b]$ în care cel puțin una dintre traiectoriile monotone asociate lui f în r_i nu admite derivată unică — finită sau infinită. Folosind mereu teorema lui Lebesgue asupra derivabilității funcțiilor monotone, rezultă că fiecare mulțime N_i este de măsură nulă, deci Z este de măsură nulă; avem $Z = E_f \cup N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_i \cup \dots$. Mulțimea $f(E_f)$ este cel mult numărabilă, deoarece E_f este cel mult numărabilă. Fiecare dintre mulțimile N_i este reuniunea a patru mulțimi $N^+(i), N_+(i), N^-(i)$ și $N_-(i)$, unde $N^+(i)$ este mulțimea punctelor în care traiectoria f^+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, $N_+(i)$ este mulțimea punctelor în care traiectoria f_+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, iar $N^-(i)$ și $N_-(i)$ sînt mulțimile de același fel asociate traiectoriilor monotone f^- și f_- . În virtutea lemei stabilite mai sus, mulțimile $f^+(N^+(i)), f_+(N_+(i)), f^-(N^-(i))$ și $f_-(N_-(i))$ sînt de măsură nulă pentru orice i . Notînd cu $M_i(f)$ reuniunea lor și punînd $M(f) = \bigcup M_i(f)$ pentru i mergînd de la 1 la infinit, vom observa că $M(f)$, ca reuniune numărabilă de mulțimi de măsură nulă, este tot o mulțime de măsură nulă.

Fie acum Z_1 acea parte din mulțimea Z care este formată din puncte care, în mulțimile lor de nivel, sînt puncte de prima specie. Spre deosebire de funcțiile continue (care nu-s constante în nici un interval), la care mulțimile de nivel, fiind mulțimi frontieră închise, conțin obligatoriu puncte de prima specie, la funcții cu proprietatea lui Darboux această situație nu mai are loc; o mulțime de nivel poate să conțină sau nu puncte de prima specie, existînd chiar cazuri în care astfel de puncte lipsesc din orice mulțime de nivel. (Se știe, de exemplu, că există funcții care iau în orice interval orice valoare reală; astfel de funcții au, evident, proprietatea

lui Darboux, dar fiecare mulțime de nivel este peste tot densă pe R , deci nu conține decât puncte de a doua specie.) Vom arăta că $f(Z_1)$ este de măsură nulă. În acest scop, va fi suficient să arătăm că $f(Z_1) \subseteq f(E_f) \cup M(f)$, deoarece am văzut că fiecare termen din membrul al doilea este o mulțime de măsură nulă. Fie deci o valoare t din $f(Z_1)$ care nu este în $f(E_f)$. În mulțimea de nivel t există deci un punct $x \in Z_1$, de prima specie. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că x este un punct de prima specie la stînga, cu alte cuvinte, există un interval $[r_j, x]$ (r_j rațional) a cărui intersecție cu mulțimea de nivel t este formată numai din punctul x . Rezultă de aici că

$$\sup_{y \in [r_j, x]} f(y) = \inf_{y \in [r_j, x]} f(y) = f(x),$$

cu alte cuvinte,

$$f_j^+(x) = f_j^-(x) = f(x) = t,$$

deci, ținînd seama că $x \in Z_1 - E_f$, rezultă existența unui i pentru care $x \in N_i$, deci pentru care $f_j^+(x)$, adică t , aparține lui $M_i(f)$, adică lui $M(f)$.

Acum, totul este pregătit pentru obținerea rapidă a teoremei Stoilow-Iosifescu, deoarece Z este chiar mulțimea excepțională, neglijabilă, din teorema relativă la proprietatea (m). Fie o valoare t care nu aparține mulțimii $A = f(Z_1)$. Dacă în mulțimea $L_t = \{x; f(x) = t\}$ nu există nici un punct de prima specie, atunci ea nu ne interesează. Dacă un astfel de punct x există în L_t , el nu va putea aparține lui Z , căci, în acest caz, el ar aparține chiar lui Z_1 , deci $f(x) = t$ ar aparține lui $f(Z_1)$, contrar ipotezei. Rezultă că x este un punct de prima specie care lipsește din Z . Însă în astfel de puncte este satisfăcută proprietatea (m) — unilaterială sau bilaterială (să nu uităm că funcția f are proprietatea lui Darboux!) și, conform teoremei relative la proprietatea (m), există un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus, iar dacă proprietatea (m) este satisfăcută bilaterial — deci dacă punctul x este izolat în L_t — există derivata unică — finită sau infinită.

Extensiunea teoremei lui Stoilow la funcții cu proprietatea lui Darboux este astfel complet stabilită. Trebuie să observăm că deducerea ei din lema privind funcțiile monotone și din teorema relativă la proprietatea (m) a cerut un anu-

mit efort, care nu este explicat de către Iosifescu, dar al cărui rezultat a fost corect intuit de către acesta. Pentru multe funcții cu proprietatea lui Darboux, extensiunea în discuție este lipsită de obiect, deoarece funcțiile în cauză nu admit puncte de prima specie în mulțimile lor de nivel. Dar chiar dacă astfel de puncte există, numai dacă mulțimea valorilor luate în aceste puncte nu formează o mulțime de măsură nulă, extensiunea teoremei lui Stoilow devine efectiv aplicabilă. Iosifescu observă că această situație netrivială de aplicare a extensiunii teoremei lui Stoilow apare chiar la unele funcții derivate. Ar fi interesant să se stabilească dacă există derivate ale lui Pompeiu sau ale lui Köpcke care să facă obiectul unei aplicări netriviale a acestei extensiuni.

Cele două teoreme privind transpunerea teoremei lui Stoilow la funcții cu proprietatea lui Darboux se deosebesc prin poziția mulțimii excepționale: în domeniul de definiție al funcției, în prima teoremă; în domeniul valorilor, în a doua. Dar ținînd seama de faptul că mulțimea excepțională din a doua teoremă nu este decât imaginea, prin f , a mulțimii excepționale din prima teoremă, obținem un rezultat mai puternic, care cumulează cele două teoreme în discuție:

Fiind dată o funcție reală f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$, există o mulțime Z de măsură nulă în $[a, b]$, a cărei imagine $f(Z)$ este de asemenea de măsură nulă, astfel încît în orice punct x care lipsește din Z sau pentru care $f(x)$ lipsește din $f(Z)$ are loc următoarea situație: Dacă x este de prima specie în mulțimea sa de nivel, atunci există în x un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus; dacă x este un punct izolat în mulțimea sa de nivel, există în x o derivată unică — finită sau infinită.

Există însă și o deosebire importantă între cazul în care mulțimea excepțională este plasată în intervalul de definiție și cazul în care această mulțime este plasată în intervalul valorilor funcției. În timp ce în primul caz are loc și o variantă „finită” (obținută prin ștergerea cuvintelor „sau infinit” din teorema inițială), în cazul al doilea această variantă „finită” nu este posibilă. Pentru a demonstra acest fapt, este suficient să considerăm o derivată Pompeiu mărginită, pentru care mulțimea zerourilor este de măsură strict pozitivă (pentru definiția derivatei lui Pompeiu și pentru

posibilitatea ca zerourile ei să formeze o mulțime de măsură pozitivă, a se vedea cartea lui S. Marcus menționată mai sus).

Vom trece acum să culegem noi fructe ale teoremei lui Stoilow, lucru posibil datorită rezultatelor obținute de Iosifescu în lărgirea cadrului acestei teoreme. Vom urma, în esență, ideile lui Iosifescu („Rev. Roumaine Math. Pures Appliquées” 3, 4 (1959)).

Am semnalat mai sus că Stoilow a desprins, drept consecință a teoremei sale, teorema lui Denjoy din 1915, relativă la situația numerelor derivate ale unei funcții continue. Însă această teoremă a lui Denjoy a primit diferite extensiuni, care au culminat cu aceea dată de Saks pentru funcții arbitrare. Această extensiune, cunoscută sub numele de teorema lui Denjoy-Young-Saks, are enunțul următor: Fiind dată o funcție reală f definită pe $[a, b]$, există o mulțime E de măsură nulă, astfel încât, în orice x din $[a, b] - E$, două numere derivate opuse sînt sau simultan finite și egale, sau simultan infinite și inegale, numărul derivat superior fiind egal cu $+\infty$. Se știe că de aici (vezi vol. II din *Analiza matematică* de Miron Nicolescu, p. 34 și cap. IX, Derivate) rezultă că în orice punct din $[a, b] - E$ două numere derivate asociate sînt sau diferite și atunci unul cel puțin este infinit sau egale și finite.

Pentru demonstrație, vom observa mai întâi că mulțimea punctelor în care o funcție f admite derivată unilaterală infinită este de măsură nulă. Într-adevăr, este suficient să observăm că, într-un punct în care f admite derivată unilaterală infinită, ea posedă proprietatea (m) cel puțin unilaterală, rămînînd apoi să se aplice acea parte din teorema relativă la proprietatea (m) care se referă la mulțimea excepțională W .

Să notăm cu E_n mulțimea acelor puncte din $[a, b]$ în care un număr derivat al lui f , de exemplu D^+ , este finit și inferior numărului natural n . Vom arăta că avem $D^+ = D^-$ aproape peste tot în E_n . Fie f_n dată de $f_n(x) = f(x) - nx$. Pentru $x \in E_n$, avem $D^+ f_n(x) = D^+ f(x) - n < 0$, deci f_n are proprietatea (m) cel puțin la dreapta lui x . Folosind din nou partea relativă la W din teorema despre proprietatea (m) (aici trebuie explicitată partea relativă la puncte cu proprietatea (m) unilaterală din demonstrația acestei teoreme), rezultă că avem aproape peste tot în E_n relația $D^+ f_n(x) =$

$= D^- f_n(x)$, deci $D^+ f(x) = D^- f(x)$. Pentru $n \rightarrow \infty$ se obține faptul că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de puncte, un număr derivat finit este egal cu numărul derivat opus. De aici și din observația relativă la mulțimea punctelor în care o funcție admite derivată unilaterală infinită rezultă imediat teorema lui Denjoy-Young-Saks.

Prin eleganța și simplitatea ei, demonstrația dată de Iosifescu acestei teoreme merită să intre în orice manual de analiză matematică, cu atît mai mult cu cît trunchiul din care ea s-a desprins — teorema lui Stoilow — prezintă un interes în sine, ca matrice a unui mare număr de fapte matematice care, din păcate, nu-și mai găsesc loc în manualele universitare.

Vom trece acum la consecințele teoremei Stoilow-Iosifescu. Iată mai întâi două teoreme din tratatul clasic al lui Saks privind teoria integralei, care se regăsesc pe această cale:

A. Dacă E este o mulțime de măsură nulă din $[a, b]$ iar f admite în fiecare punct din E derivată finită, atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

B. Dacă E este o mulțime din $[a, b]$, iar derivata lui f există și este egală cu zero în orice punct din E , atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

Aceste rezultate sînt consecințe directe ale următoarei leme a lui Iosifescu: Dacă numerele derivate la dreapta ale unei funcții f sînt, în punctele unei mulțimi E , mărginite de o constantă M , atunci măsura exterioară a mulțimii $f(E)$ nu întrece produsul dintre $2M$ și măsura exterioară a lui E .

Propoziția B de mai sus dă posibilitatea să se obțină, drept consecințe ale teoremei Stoilow-Iosifescu, următoarele două teoreme.

Teorema 1. Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ și fie m și M marginile lui f pe $[a, b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a, b]$ în care f admite derivată unică — finită sau infinită. În aceste condiții, mulțimea $[m, M] - f(D)$ este de măsură nulă dacă și numai dacă pentru aproape orice t în $[m, M]$ mulțimea L_t de nivel t conține un punct izolat.

Demonstrație. Suficiența condiției este o consecință directă a teoremei Stoilow-Iosifescu. Rămîne să stabilim necesitatea condiției. În acest scop, să presupunem, prin reducere la

absurd, că există o mulțime E de măsură exterioară pozitivă, astfel încât pentru $t \in E$ nivelul L_t este dens în sine. Dacă într-un punct al unui astfel de nivel există derivata lui f , ea este obligatoriu egală cu zero și, în virtutea propoziției B de mai sus, ar trebui ca E să fie de măsură nulă, în contradicție cu ipoteza raționamentului prin reducere la absurd. Rezultă că există o parte $F \subseteq [m, M]$ de măsură exterioară pozitivă, astfel încât pentru orice t în F mulțimea de nivel L_t nu conține nici un punct de diferențiabilitate a lui f , ceea ce este iarăși contradictoriu.

Teorema 2. *Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$. Pentru ca mulțimea valorilor pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) să fie de măsură nulă este necesar și suficient ca pentru aproape orice t în $[m, M]$ mulțimea de nivel L_t să fie densă în sine.*

Demonstrație. Suficiența condiției rezultă din propoziția B de mai sus, dacă se ține seama că într-un punct dintr-o mulțime de nivel densă în sine derivată — dacă există — este obligatoriu nulă. Pentru a stabili necesitatea condiției, să observăm că, dacă ar exista o mulțime de măsură exterioară pozitivă de valori t pentru care L_t conține puncte izolate, atunci din teorema Stoilow-Iosifescu ar rezulta că, exceptând o mulțime de măsură nulă de valori t , în toate aceste puncte izolate ar exista derivata unică, în contrast cu ipoteza că mulțimea valorilor în punctele cu derivată unică este de măsură nulă.

Să observăm că partea din teorema 2 care se referă la necesitatea condiției generalizează teorema lui Minakshisundaram despre care am vorbit în prima parte a acestui capitol și pe care am regăsit-o la momentul respectiv, cu ajutorul teoremei lui Stoilow.

Din teorema lui Minakshisundaram rezultă că aproape toate mulțimile de nivel ale unei funcții continue, dar nederivabile în nici un punct, sînt mulțimi perfecte. Iosifescu a pus problema existenței unei funcții continue neconstante, ale cărei mulțimi de nivel sînt, toate, perfecte. Răspunsul afirmativ la această problemă a fost dat de Paul Erdős.

Cu ajutorul teoremei 2 și al propozițiilor A și B de mai sus, Iosifescu a mai stabilit și următoarea teoremă, pe care o reproducem aici fără demonstrație:

Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ și fie m și M marginile lui f pe $[a, b]$. Să presupunem că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de valori t , fiecare mulțime de nivel L_t conține un punct izolat. Să mai presupunem că valorile pe care f le ia în punctele în care derivata lui f există și este infinită formează o mulțime a cărei complementară în raport cu $[m, M]$ nu este de măsură nulă. În aceste condiții, punctele în care derivata lui f nu se anulează formează o mulțime de măsură strict pozitivă.

Se poate observa că în cazul particular al funcțiilor continue se regăsește faptul, deja prezentat la începutul acestui capitol (tot ca o consecință a teoremei lui Stoilow), conform căruia proprietatea (N) a lui Luzin implică pozitivitatea măsurii mulțimii punctelor în care derivata există și nu se anulează și faptul că complementarea mulțimii $f(D)$ este de măsură nulă.

Este interesant de observat că unele extensiuni prilejuite de teorema Stoilow-Iosifescu rămîn fără obiect. Așa se întîmplă cu o parte din teorema lui Saks privind condiția T_1 a lui Banach, teoremă pe care am obținut-o ca o consecință a teoremei lui Stoilow. Cu aceeași demonstrație, dar preluîndu-ne de teorema Stoilow-Iosifescu, se obține următorul rezultat: Pentru ca o funcție cu proprietatea lui Darboux să îndeplinească condiția T_1 este necesar ca valorile luate în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulțime de măsură nulă. Progresul acestui rezultat în raport cu teorema lui Saks este real în măsura în care există funcții discontinue care au proprietatea lui Darboux și îndeplinesc condiția T_1 . Însă astfel de funcții nu pot exista, deoarece la o funcție Darboux care admite discontinuități valorile luate de o infinitate de ori formează o mulțime care conține un interval, fapt incompatibil cu proprietatea T_1 .

Cel care a dus mai departe rezultatele noastre și ale lui Iosifescu privind teorema lui Stoilow este matematicianul indian (actualmente lucrînd la Universitatea Alberta din Edmonton, Canada) Krishna Murari Garg (în „Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae”, 1963). Vom expune, în cele ce urmează, ideile sale.

Fie f o funcție reală definită în intervalul I . Să notăm cu $Y_\alpha(f)$ ($\alpha = i, d, p, f, \infty, e, u, c$) mulțimea valorilor $t \in f(I)$

pentru care mulțimile de nivel $L_t = \{x; x \in I, f(x) = t\}$ sînt izolate, respectiv dense în sine, perfecte, finite, infinite, numărabile, nenumerabile sau de puterea continuului. Garg arată mai întîi că există o mulțime $Y \subseteq f(I)$, astfel încît

$$\mu(f(I) - Y) = 0 \quad (1)$$

(unde prin μ am notat măsura Lebesgue) și, pentru orice $t \in Y$, $f^{-1}(t)$ este nenumerabilă numai dacă conține un punct în care

$$D^+f = D^-f = +\infty, \quad D_+f = D_-f = -\infty \quad (2)$$

(prin D , cu exponenții și indicii respectivi, reprezentînd, ca de obicei, numerele derivate ale lui f).

Fie K mulțimea punctelor din I în care este satisfăcută relația (2). Avem $Y \cap Y_u(f) \subseteq f(K)$, deci $Y_u(f) - f(K) \subseteq f(I) - Y$. De aici, în baza relației (1), se obține

$$\mu(Y_u(f) - f(K)) = 0. \quad (3)$$

Am demonstrat astfel:

Teorema lui Garg pentru funcții arbitrare. Fie f o funcție reală definită pe I și fie K mulțimea punctelor în care au loc relațiile (2). În aceste condiții, mulțimea $Y_u(f) - f(K)$ este de măsură nulă. (În cazul în care f este boreliană, mulțimea $Y_u(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin, așa cum rezultă dintr-o teoremă a lui S. Braun din „Fundamenta Mathematicae”, 1933, deci măsurabilă Lebesgue și obținem că măsura lui $Y_u(f)$ nu întrece măsura interioară a lui $f(K)$).

Corolar 1. O funcție reală f îndeplinește condiția T_2 a lui Banach dacă valorile pe care f le ia în punctele în care numerele derivate superioare sînt egale cu $+\infty$, iar numerele derivate inferioare sînt egale cu $-\infty$ formează o mulțime de măsură nulă. (Amintim că o funcție are proprietatea T_2 dacă valorile pe care ea le ia de o infinitate nenumerabilă de ori formează o mulțime de măsură nulă.)

Să presupunem acum că f satisface proprietatea lui Darboux pe I . Se poate arăta că există o mulțime $Y \subseteq f(I)$ cu proprietatea (1) și astfel încît, pentru orice $t \in Y$, un punct x din $f^{-1}(t)$ este izolat dacă și numai dacă f este derivabilă în x . Notînd, ca și pînă acum, cu D mulțimea punc-

telor din I în care f are o derivată unică — finită sau infinită — și punînd $N = I - D$, vom avea, pentru orice $t \in Y$:

(i) $f^{-1}(t)$ este izolată dacă și numai dacă $f^{-1}(t) \in D$

și

(ii) $f^{-1}(t)$ este densă în sine dacă și numai dacă $f^{-1}(t) \subseteq N$.

Avem deci

$$Y \cap Y_f(f) = Y - f(N) \quad (4)$$

și

$$Y \cap Y_d(f) = Y - f(D). \quad (5)$$

Deoarece o mulțime de nivel care nu este izolată este obligatoriu infinită, relația (4) implică incluziunea

$$Y \cap f(N) \subseteq Y_\infty(f). \quad (6)$$

Din relațiile (1), (4), (5) și (6) rezultă

Teorema lui Garg pentru funcții cu proprietatea lui Darboux. Fie f o funcție reală cu proprietatea lui Darboux pe I . Avem

$$Y_f(f) \sim f(I) - f(N), \quad (a)$$

$$Y_d(f) \sim f(I) - f(D), \quad (b)$$

și

$$\mu(f(N) - Y_\infty(f)) = 0, \quad (c)$$

unde $A \sim B$ dacă $A = (B - E_1) \cup E_2$, E_1 și E_2 fiind mulțimi de măsură nulă. (În cazul în care f este boreliană, mulțimea $Y_d(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin, în virtutea unui rezultat al lui S. Braun, loc. cit., deci este măsurabilă Lebesgue. Rezultă de aici că $f(D)$ este măsurabilă, fiind similară mulțimii $f(I) - Y_d(f)$).

Din a) se deduce:

Corolar 2. Valorile pe care o funcție f cu proprietatea lui Darboux le ia în punctele în care nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă dacă și numai dacă mulțimea de nivel t este izolată pentru aproape orice t din $f(I)$.

Din b) se deduce:

Corolar 3. Valorile pe care o funcție f cu proprietatea lui Darboux în I le ia în punctele în care există derivata f' (fi-

nită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă dacă și numai dacă mulțimea de nivel t este densă în sine pentru aproape orice t din $f(I)$.

Rezultă de asemenea din $b)$ că mulțimea $f(I) - f(D)$ este de măsură nulă dacă și numai dacă $Y_d(f)$ este de măsură nulă, cu alte cuvinte, dacă și numai dacă aproape fiecare mulțime de nivel a lui f conține un punct izolat. Avem deci:

Corolar 4. Fie f cu proprietatea lui Darboux pe I . Complementara mulțimii valorilor luate de f în punctele în care există f' (finită sau infinită) este de măsură nulă dacă și numai dacă pentru aproape orice t din $f(I)$ mulțimea de nivel t conține un punct izolat.

În cazul în care f satisface, în plus, condiția T_1 a lui Banach, $Y_\infty(f)$ este de măsură nulă, deci, în baza proprietății $c)$, rezultă că $f(N)$ este de măsură nulă. Așadar:

Corolar 5. O funcție reală f cu proprietatea lui Darboux pe I îndeplinește condiția T_1 numai dacă valorile luate de f în punctele în care ea nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă.

Observăm că atât corolarul 3, cât și corolarul 4 regăsesc rezultate ale lui Iosifescu relative la punctele izolate în mulțimile lor de nivel. Mai precis, corolarul 3 coincide cu teorema 2, iar corolarul 4 coincide cu teorema 1. În ceea ce privește corolarul 5, el coincide cu acel exemplu de extensiune pe care am calificat-o mai sus ca fiind lipsită de obiect.

Se pare însă că Garg nu a observat că singurul caz în care se poate realiza condiția stipulată în enunțul corolarului 5 este acela în care funcția considerată este continuă; dar în această formă rezultatul a fost deja obținut din teorema lui Stoilow pentru funcții continue.

Faptul remarcabil în punctul de vedere al lui Garg este plasarea unei părți importante din teorema lui Stoilow în contextul unor fapte privind funcțiile *arbitrare*. Roadele se văd chiar în consecințele acestui punct de vedere în cazul particular al funcțiilor continue, caz în care se obține o teoremă care furnizează o informație foarte bogată în ceea ce privește măsura mulțimilor $Y_\infty(f)$. Mai întii să observăm că din continuitatea lui f rezultă egalitățile

$$Y_i(f) = Y_f(f), \quad Y_d(f) = Y_p(f), \quad Y_u(f) = Y_c(f), \quad (7)$$

deci este suficient să se considere mulțimile $Y_f(f)$, $Y_\infty(f)$, $Y_c(f)$, $Y_u(f)$ și $Y_p(f)$. Se verifică ușor că, datorită continuității lui f , aceste mulțimi sînt măsurabile. Mai precis, are loc următoarea teoremă, pe care o reproducem fără demonstrație:

Teorema lui Garg pentru funcții continue. Fie f continuă pe I . Cu notațiile deja introduse, avem egalitățile:

$$\mu(Y_f(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(N)), \quad \mu(Y_\infty(f)) = \mu(f(N)),$$

$$\mu(Y_p(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(D)), \quad \mu(Y_u(f)) \leq \mu_i(f(K)),$$

și

$$\mu(f(D) \cap f(N)) - \mu_i(f(D) \cap f(K)) \leq \mu(Y_c(f)) \leq \mu(f(D) \cap f(N)).$$

(Prin μ_i și μ_e am notat măsura interioară și măsura exterioră).

Printre numeroasele consecințe ale acestei teoreme figurează și următoarele rezultate pe care le-am obținut, în prima parte a acestui capitol, cu ajutorul teoremei lui Stoilow:

Dacă f este continuă și îndeplinește condiția T_2 , atunci $\mu(f(D)) = \mu(f(I))$;

Dacă f este continuă și îndeplinește în I condiția N a lui Luzin, atunci $\mu(f(D^*)) = \mu(f(I))$, unde D^* este mulțimea punctelor în care f admite derivată finită;

Dacă f este continuă pe I , iar valorile pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) formează o mulțime de măsură nulă, atunci pentru aproape orice t din $f(I)$ mulțimea de nivel t este perfectă, rară și nevidă.

Aceasta este doar o parte din itinerarul teoremei lui Stoilow, o teoremă care peste treizeci de ani a trecut neobservată, dar ale cărei consecințe impun prezența ei în orice expunere a teoriei moderne a derivării. Articole de sinteză ca cel al lui A. M. Bruckner și J. G. Ceder din 1965, asupra proprietății lui Darboux (în „Sonderdruck aus Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”) și cel al lui A. M. Bruckner și J. L. Leonard din 1966, asupra derivatelor (în „American Mathematical Monthly”, Part. II) consemnează rezultatele lui Stoilow, prin intermediul extensiunilor și ameliorărilor obținute de cei care au venit după Stoilow. Dar, chiar

prin acest fapt, numele lui Stoilow devine din ce în ce mai puțin asociat de niște rezultate care, în ideea lor fundamentală, îi aparțin. Este de datoria istoriei științei de a-i restitui ce i se cuvine.

Contribuții în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale

Preocupările din prima parte a carierei matematice a lui S. Stoilow sînt legate de studiul ecuațiilor cu derivate parțiale, mai precis de studiul singularităților soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale liniare.

Deși realizările sale în acest domeniu sînt mai puțin cunoscute decît cele, fundamentale, din teoria funcțiilor analitice, ele prezintă totuși un interes deosebit, și aceasta din mai multe motive. Unul dintre acestea este că în acest domeniu și-a susținut teza S. Stoilow, o teză remarcabilă, sub conducerea marelui matematician É. Picard. Apoi, că printr-o lumină cunoscîntelor noastre de astăzi, ele arată că S. Stoilow sesizase unele aspecte matematice importante, care au fost exploatate sistematic mult mai târziu. În sfîrșit, aceste lucrări de debut arată deja trăsăturile definitorii ale matematicianului Stoilow: căutarea maximei generalități, sesizarea esențialului, eleganța și naturalitatea demonstrațiilor (care par să atenueze dificultățile reale ale problemelor tratate), claritatea deplină, senzația foarte netă pe care o are cititorul atent că autorul domină subiectul tratat. Că aceste preocupări n-au fost conjuncturale, Stoilow dăruindu-le ani buni de studiu, este iarăși un fapt semnificativ. Dealtfel, rezultatele obținute justifică efortul făcut, ele constituind un tot încheiat.

Vom face o succintă trecere în revistă a principalelor rezultate obținute de S. Stoilow în această direcție. Dar mai înainte cîteva cuvinte privind dezvoltarea temei respective în acea perioadă. După ce É. Picard introdusese puternica metodă a aproximațiilor succesive, școala franceză începuse să încerce să studieze, pe situații cît de generale posibil, ecuațiile cu derivate parțiale. Trebuie amintite aici, după lucrările lui Picard, cele ale lui Goursat, Vessiot, Riquier, puțin mai târziu Janet, Gevrey etc. Din păcate, multe din aceste lucrări n-au avut ecoul meritat pentru că în anume sens ele devansau ma-

tematica epocii ca problematică, dar, evident, cu metodele și tehnica vremii, ceea ce nu a permis întotdeauna degajarea unor rezultate fundamentale. Două lucrări importante au atras în special atenția lui S. Stoilow, cea a lui Delassus (1895) și cea a lui Le Roux (1898) în care, primul pentru cazul analitic real, celălalt pentru cazul complex, studiau singularitățile posibile ale soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale. În nota sa de la „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris” [1] din 1914, S. Stoilow enunță rezultatele pe care le-a obținut privind singularitățile ecuațiilor liniare, în 2 variabile, partea principală fiind cu coeficienți constanți, ceilalți coeficienți olomorfi. El arată astfel că dacă datele inițiale purtate pe o caracteristică sînt întregi, iar celelalte date purtate pe o dreaptă necaracteristică sînt analitice, atunci singularitățile soluției ecuației $P(x, D)u=0$ corespunzînd acestor date sînt aceleași cu singularitățile soluției ecuației $P_m(D)u=0$ corespunzînd aceluiași date, unde cu $P_m(D)$ am notat partea principală a operatorului P . Aici apare pentru prima oară, cel puțin din cîte cunosc, rolul preponderent pe care îl are partea principală a operatorului în propagarea singularităților.

Acest rol a fost apoi exploatat sistematic (în anii noștri) de cei ce studiază propagarea singularităților în cadrul teoriei hiperfuncțiilor (în contrast cu ce se întîmplă pentru soluțiile distribuției). Tot în aceeași notă S. Stoilow introduce noțiunea de funcție evasiuniformă și arată că dacă datele necaracteristice sînt evasiuniforme atunci și soluția ecuației (în condițiile indicate mai înainte) corespunzătoare acestor date este evasiuniformă. Cum Le Roux arătase că, în general, o ecuație liniară nu are soluții uniforme (Stoilow folosește încă termenul de integrală), rezultă că cea mai simplă clasă de soluții este cea a soluțiilor evasiuniforme. Semnalăm de asemenea și următorul rezultat frumos: dacă o ecuație liniară are caracteristicile confundate, coeficienții funcției întregi (de 2 variabile), coeficientul derivatei de ordinul cel mai mare fiind egal cu unitatea, atunci ecuația admite o infinitate de soluții uniforme cu singularități izolate (caz particular: ecuația căldurii).

Într-o altă notă din 1915 [2], Stoilow arată că o funcție evaduplu periodică de 2 variabile, cu singularități liniare poate avea cel mult patru familii diferite de singularități;

de aici deduce forma funcțiilor evaduplu periodice care pot fi soluții ale unei ecuații cu derivate parțiale liniare, cu coeficienți constanți.

Următoarea notă din 1916 [3] prezintă un rezultat reluat în detaliu în teză.

După cum am spus, teza lui Stoilow a fost susținută la Sorbona în 1916 [4], sub conducerea lui É. Picard. Este interesantă citirea introducerii tezei: după ce reamintește de rezultatele clasice ale lui Cauchy și Picard, referitoare la cazul „fără singularități”, S. Stoilow arată că în această lucrare „mi-am propus să stabilesc o teoremă de existență pentru ecuațiile liniare cu derivate parțiale în două variabile independente de formă generală, *datele inițiale avînd singularități*, și de a da *forma analitică* a integralelor în jurul acestor singularități”.

Partea întâi a tezei, *teoreme generale*, este caracteristică gândirii lui Stoilow. Fără a intra în detalii să remarcăm că Stoilow regăsește mai întâi un rezultat al lui Goursat cu altă metodă (la fel de generală, după cum precizează), de prelungire analitică a soluției astfel încît aceasta să fie olomorvă într-un domeniu cuprinzînd porțiunea de curbă ce poartă datele inițiale. Acest tip de rezultat va fi utilizat mult mai tîrziu de Leray și preluat de la acesta de către Bony-Schapira în studiul propagării singularităților soluțiilor ecuațiilor cu coeficienți analitici. Stoilow demonstrează apoi următorul rezultat (în teză acesta este intitulat Teorema generală II): fiind dată o ecuație cu derivate parțiale în două variabile, de ordinul n , cu coeficienți olomorfi, atunci soluția acestei ecuații, avînd pe o caracteristică $n-k-1$ derivate normale date, iar celelalte $k-1$ derivate date pe o curbă transversală acestei caracteristici, este olomorvă acolo unde datele inițiale sînt olomorfe (în ipoteza naturală că ecuația considerată nu are singularități fixe în acel domeniu).

Acest rezultat este deci extinderea la *cazul caracteristic* al rezultatelor clasice privind problema Cauchy-Goursat necaracteristică. Abia după aceea se trece la studiul cazului cînd datele inițiale prezintă singularități, demonstrînd un rezultat care afirmă, în esență, că dacă datele necaracteristice sînt evasuniiforme, atunci și soluția rezultă evasuniiformă. Partea a doua a tezei studiază ecuațiile liniare cu coeficienți peste tot olomorfi, fără singularități fixe. Se obțin condiții de exis-

tență a soluțiilor uniforme, de caracterizări a soluțiilor periodice etc.

Într-un articol ulterior din 1919 [5] este generalizat rezultatul principal al tezei. Iată ce spune S. Stoilow în prefața acestei lucrări: „Memoriul de față are mai întîi ca scop să dea o generalizare a teoremei din teză, unde funcțiile inițiale aveau singularități de o formă analitică particulară. Funcțiile inițiale vor fi acum absolut arbitrare, supuse la singura condiție de a fi toate olomorfe într-un același punct”. Regăsim și aici această dorință de a obține rezultate de generalitate maximă. Lucrarea conține o subtilă analiză a metodei aproximațiilor succesive ce permite demonstrația generalizării amintite. Sub această formă, rezultatul are un caracter definitiv (în cazul a 2 variabile) și este desigur important.

Tot în aceeași lucrare Stoilow dă o formă generală a soluțiilor olomorfe ale unei ecuații cu derivate parțiale liniare în două variabile, arătînd apoi cum rezultatul principal al lui Le Roux se poate ușor deduce din rezultatul său. Teorema lui Stoilow este de altfel mai generală căci cuprinde și cazul caracteristicilor confundate ceea ce metoda lui Le Roux nu permitea. Cu acest articol se încheie seria lucrărilor dedicate ecuațiilor cu derivate parțiale.

După cum se vede din această succintă prezentare rezultatele obținute de S. Stoilow în domeniul propagării singularităților, deși lucrări de debut, sînt extrem de interesante și vădesc un talent și o maturitate remarcabile. Toemai de aceea ne putem întreba de ce Stoilow n-a continuat sau reluat vreodată aceste lucrări. Evident, este greu de dat astăzi un răspuns absolut sigur la această întrebare. Dar, fără a ne hazarda prea mult, putem totuși încerca să răspundem, bazîndu-ne pe caracteristicile de matematician ale lui S. Stoilow, precum și pe dezvoltarea matematicii în acea perioadă.

S. Stoilow era din rasa matematicienilor care, după expresia lui Lejeune-Dirichlet, tind să substituie ideile calculului. Vreau să spun prin aceasta că Stoilow făcea parte din categoria matematicienilor cu puternice tendințe conceptualizante, pentru care artificiile tehnice nu reprezintă decît un accesoriu — citeodată necesar — ce se elimină în clipa în care s-a ajuns la conceptul și enunțul „corect”. În acest context, „corect” înseamnă mai mult decît fără eroare; înseamnă, într-un mod greu de explicat nespecialiștilor, „natural”, greu

de conceput altfel, „la locul său” într-o subtilă arhitectură și ordonare a ideilor, conceptelor și rezultatelor. Dar domeniul în care a lucrat la început S. Stoilow *nu putea fi abordat, atunci*, de pe aceste poziții. Motivele sînt multiple, dar, desigur, nu este întîmplător faptul că abia în 1957, apare lucrarea fundamentală a lui Leray care, pentru nevoile cauzei, aproape că făurește o lume matematică nouă. Dar aceasta pe fundalul unei matematici ce dezvoltase concepte și tehnici noi fără de care nici chiar Leray probabil că nu ar fi reușit.

Aceasta explică și de ce Stoilow s-a mărginit la cazul a 2 variabile. După ecuațiile diferențiale ordinare în domeniul complex, în care, la acea epocă, rezultatele lui Painlevé încheiau practic subiectul, acesta era cazul cel mai simplu și, tehnic vorbind, singurul abordabil. Au fost necesare dezvoltările ulterioare ale teoriei funcțiilor de mai multe variabile complexe (care la acea epocă era în fază incipientă și puțin cunoscută), care la rîndul lor au beneficiat de introducerea noțiunilor de fascicol, de coomologie cu valori într-un fascicol și de rezultate de algebră locală și omologică, pentru a putea fi utilizată în aplicații. Pe de altă parte, însăși noțiunea de varietate caracteristică (în cazul a $n > 2$ variabile) cerea conceptul de varietate, eventual cu singularități. (Dealtfel este interesant de văzut că Stoilow, în cazurile tratate, era pe deplin conștient de singularitățile posibile ale caracteristicilor). Toate acestea explică, cred, de ce Stoilow, după ce a încheiat un ciclu de lucrări excelente, a abordat alte domenii, cu succesul știut.

Este interesant de remarcat că Stoilow, chiar în aceste prime lucrări a căutat întotdeauna ceea ce era esențial, semnificativ. În repetate rînduri el indică rapid posibilitatea unor generalizări, eventual trecerea la ecuații neliniare, dar acestea erau probabil pentru dînsul un „vinat prea mic” pentru a fi dezvoltate în detaliu. Care este răsunetul pe care l-au avut lucrările amintite ale lui S. Stoilow? Care este stadiul actual al tematicii abordate la începutul secolului de către Stoilow? Întrebări la care desigur merită să căutăm răspunsuri. După cum am spus mai înainte, Stoilow a fost oarecum înaintea timpului său în această problemă (ca oarecum înaintea timpului său în această problemă (ca și alți cercetători ai școlii franceze menționate mai sus). Din acest motiv lucrările sale sus-amintite, cunoscute și aplicate de H. Lewy, L. Fantappié, St. Bergmann și de alții, în perioada

interbelică, nu sînt totuși suficient de cunoscute astăzi (cum, dealtfel, este și cazul lucrărilor lui L. Fantappié — din generația imediat următoare).

Subiectul este însă în plină actualitate și dezvoltare. Primul progres substanțial se datorează lui Leray care, începînd din 1957, a publicat o serie de lucrări pe această temă. El studiază în detaliu cazul în care suprafața inițială are puncte caracteristice, arată că în vecinătatea punctului caracteristic al suprafeței ce poartă datele inițiale soluția se ramifică în jurul suprafeței caracteristice tangente la cea inițială și reușește, în 1964, (în colaborare cu L. Garding și T. Kotake) să uniformizeze soluția.

În altă direcție, Y. Hamada în 1969 abordează cazul în care suprafața inițială nu este caracteristică, dar datele inițiale au singularități; se arată că singularitățile se propagă de-a-lungul caracteristicelor ce pleacă din singularitățile datelor inițiale. Ulterior, Leray în colaborare cu Hamada, Wagschal și alții au reluat problema.

Dar abia după 1970, școala japoneză, mai precis M. Sato și elevii săi, în special M. Kashiwara și T. Kawai au reușit să dea un cadru general și natural în care să se studieze astfel de probleme. Este vorba de teoria $\mathcal{D}$ -modulelor și a microlocalizării. În acest cadru se regăsesc relativ ușor rezultatele lui Leray-Hamada.

Drumul parcurs de la Picard și Stoilow la cercetările actuale este lung și progresele sînt însemnate. Dar nu putem să uităm faptul că, mai bine cu 60 ani în urmă, Stoilow sesiza două fenomene generale importante, astăzi folosite în mod constant, și anume: posibilitatea prelungirii analitice a soluției problemei Cauchy, pe un domeniu ce depinde doar de domeniul pe care datele inițiale sînt analitice, dar independent de date propriu-zise și rolul părții principale în probleme de propagare de singularități.

Aceasta este marca matematicienilor de mare valoare: a pune în evidență ceea ce este esențial. S. Stoilow a dovedit acest lucru de nenumărate ori.

Simion Stoilow și școala românească de matematică

Cînd, în 1940, profesorul Simion Stoilow se transfera de la Universitatea din Cernăuți la Universitatea din București, însoțit de colaboratorii săi mai tineri Miron Nicolescu și Gheorghe Vrănceanu, o importantă perioadă în evoluția fenomenului matematic românesc se apropia de sfîrșit. Este vorba de acea perioadă a matematicii românești în care, după începuturile eroice realizate de Spiru Haret și David Emmanuel, ea se organiza în școală și căpăta o surprinzătoare strălucire internațională prin contribuțiile succesive a trei generații: mai întîi generația lui Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompeiu și Traian Lalescu, apoi generația lui Simion Stoilow și Octav Onicescu, în fine generația lui Miron Nicolescu, Gheorghe Vrănceanu, Gheorghe Mihoc și alții.

Pe atunci, în vîrstă de 53 de ani, noul profesor al Universității din București era un savant binecunoscut în lumea matematică internațională și unul dintre cei mai originali pe care i-a dat gîndirea matematică românească. Printre altele, el devenise celebru prin spectaculoasa sa teorie topologică a funcțiilor analitice, teorie care leagă un domeniu clasic dar ocupînd o poziție centrală în matematică, și anume analiza complexă, de o disciplină modernă, topologia generală.

Cunoscător profund al fenomenului matematic în totalitatea lui, Stoilow depășea însă frontierele domeniului său prin vasta sa cultură științifică, filozofică și umanistă care „îi permitea să abordeze orice problemă” cum avea să mărturisească mai tîrziu colegul său la Academie, profesorul Alexandru Rosetti*.

Iată de ce, prin 1943, el ajunsese să ocupe în mod practic poziția neoficială de *magister mathematicae* al elitei intelectuale universitare din țara noastră, în sensul pe care Hermann Hesse îl dă acestui termen. De aici va rezulta apoi rolul său covîrșitor în organizarea și conducerea aceluși proces care avea să ducă treptat la sincronizarea și integrarea matematicii românești cu matematica modernă și la formarea noii școli românești de matematică.

* A. Rosetti, *Întîlnire cu Stoilow*, în volumul *Note din Grecia, India, Israel, Diverse*, Ed. Minerva, B.P.T., București, 1970.

Dar ce este această matematică modernă și mai ales cum era ea văzută atunci, în 1940, cînd Stoilow își începea noua sa carieră la Universitatea din București?

După cum se știe, mutația fenomenului matematic mondial și organizarea sa în ceea ce avea să se numească „matematica modernă” deveniseră evidente încă de pe la începutul secolului al XX-lea și au fost în principal rezultatul unei evoluții din interior, sub acțiunea adică a legilor sale interne de dezvoltare, dar procesul a fost oarecum grăbit din „exterior”, adică sub influența noilor idei care își făceau loc în fizica modernă.

Dacă am încerca să caracterizăm esența acestei noi matematici, ar trebui probabil să reținem în primul rînd următoarele două trăsături ale ei:

a) Punerea *teoriei mulțimilor* la baza întregului edificiu al matematicii, edificiu care urmează să fie (re)construit în cea mai mare parte.

b) Considerarea *structurilor* matematice ca principalele ființe ale universului matematic, împreună cu o anume precădere acordată structurilor *plurivalente*, în opoziție cu caracterul *univalent* al geometriei și aritmeticii la grecii antici și al mecanicii în timpurile mai noi.

Structuralismul matematic a însemnat nu numai o nouă definiție și o nouă filozofie a matematicii, dar și o metodă nouă de cercetare, legată oarecum de natura universului matematic cu o dinamică neașteptat de asemănătoare dinamicii universului fizic:

„Ca și în natura fizică, în lumea matematică faptele complexe se disociază, iar componentele lor apoi se grupează în jurul unor legi generale, structurale, cauzale”*.

Pe plan „arhitectural”, mutația de care am vorbit s-a materializat prin construirea primelor două coloane ale edificiului matematicii moderne: algebra abstractă și topologia. După Stoilow, descoperirea structurilor algebrice și a structurilor topologice a rezultat în mod natural din analiza conceptului de continuu numeric: „Și această analiză a dus mai întîi la definiția riguroasă, pur aritmetică, a numărului așa-zis irațional[...] iar apoi, la începutul secolului nostru, la crearea celor două mari discipline axiomatice ale matematicii moderne,

* S. Stoilow, *Gîndirea axiomatică în matematica modernă*, Revista fundațiilor regale, 11 (1944), 364—381.

care, după expresia lui Hermann Weyl, constituie două drumuri ale înțelegerii matematice: algebra abstractă și topologia generală**.

Pentru diverse școli naționale de matematică ce, din rațiuni tot atât de diverse, întârziaseră „poate” prea mult pe o linie pur clasicizantă, inițierea unui proces de sincronizare și modernizare devenise necesară și inevitabilă. Un proces de acest gen fusese inițiat, de pildă, prin 1935, în Franța, de către un grup de matematicieni care avea să devină celebru sub denumirea generică de N. Bourbaki.

În țara noastră, acest proces, început pe unele direcții încă prin 1940 (în principal la Universitatea din București, de pildă, unele cursuri ale lui Octav Onicescu și Dan Barbilian; de altfel, cu mult înainte, David Emmanuel ținuse cîteva ani un curs de teoria grupurilor și teoria lui Galois la Școala normală de pe lângă Universitatea din București” [75], pp. 35—45) avea să capete o dimensiune națională, o formă organizată și un conținut universalizant abia în anul 1948/49, în condițiile favorabile generate de două evenimente petrecute în acel an și care au avut o importanță decisivă pentru destinele științei și culturii românești. Este vorba de reforma învățămîntului și reforma Academiei. Un raport** semnificativ al lui Stoilow, inclus în volumul de față, se referă printre altele și la acest moment al dezvoltării noastre.

Pentru matematică, cele două reforme au însemnat în primul rînd lărgirea bazei de selecție cauzată de democratizarea învățămîntului, iar în al doilea rînd crearea Institutului de matematică al Academiei, loc de concentrare a celor mai talentate forțe matematice ale țării, și de cercetare științifică organizată.

Institutul de matematică a furnizat de asemenea o modalitate reală, practică și eficientă, de integrare a învățămîntului superior cu cercetarea științifică metodică.

În fapt, modalitățile de normare a activității în institutele de învățămînt superior erau în acei ani destul de relaxante, iar procesul de învățămînt organizat de așa manieră încît să lase liber de orice activitate didactică un lung interval de timp în

* Ibidem, p. 374.

** S. Stoilow, *Perspectivile cercetării științifice în patria noastră* (1954), vezi lucrarea de față, pp. 272—281.

fiecare an, acesta fiind folosit pentru cercetare științifică intensivă, scriere de monografii, călătorii de lucru peste hotare, pregătirea de noi variante pentru cursurile de anul următor etc. În aceste condiții a fost posibilă angajarea celor mai buni profesori din învățămîntul superior, cu o jumătate de normă științifică, la noile institute de cercetare ale Academiei sau la filialele ei din țară. De altfel, intensificarea muncii științifice universitare a fost ridicată la rangul de principiu prin „recunoașterea explicită și categorică a acestui fapt [...] că un învățămînt superior universitar demn de acest nume este și rămîne indisolubil legat de o muncă constantă, permanentă, de cercetare științifică personală, dusă de fiecare din membrii corpului său didactic în specialitatea sa respectivă”.

În acord cu calitatea sa neoficială, dar unanim recunoscută, de lider al comunității matematice românești, lui Stoilow i s-a încredințat în acel an 1948/49 tripla funcție de decan al Facultății de matematică din București, director adjunct al Institutului de matematică și președinte al Secției de matematică și fizică a Academiei. De pe aceste poziții, Stoilow a avut de la început un rol decisiv în conducerea cercetării matematice în țara noastră în noua ei formă de organizare; în particular, el a fost organizatorul principal și conducătorul procesului de sincronizare și modernizare a matematicii de care am vorbit mai sus, proces care s-a desfășurat de altfel paralel cu o creștere fără precedent a matematicii românești în totalitatea ei. În această desfășurare Stoilow a impus respectarea riguroasă a trei condiții principale, care au fost: alegerea unor teme de cercetare adecvate, apoi promovarea tinerilor pe criterii în primul rînd profesionale și, în fine, crearea și întreținerea unui climat favorabil cercetării științifice. Trebuie menționat aici rolul considerabil pe care l-au avut în acest proces, alături de Stoilow, și ceilalți conducători ai comunității matematice românești din acei ani, de pildă în București: Octav Onicescu, Victor Vălcovici, Gheorghe Demetrescu, Miron Nicolescu, Gheorghe Vrăncianu, Dan Barbilian, Alexandru Froda, Al. Ghica, Grigore Moisil, N. Teodorescu, Caius Iacob ș.a.

Seminariile științifice organizate de acești matematicieni și de alții au devenit treptat una din metodele principale de lucru la Institutul de matematică și la celelalte centre de cer-

* Ibidem.

cetare matematică din țară. Aceste seminarii, care au reprezentat de asemenea adevărate școli de educație științifică pentru noua generație de cercetători abia ieșită de pe băncile Universității, au ajuns să acopere treptat principalele compartimente ale matematicii contemporane.

De pildă, Seminarul Stoilow, inițiat de acesta prin 1950, a cuprins domenii ca: suprafețe riemanniene, teoria potențialului, topologie algebrică, algebra omologică, teoria categoriilor, teoria fasciculelor, teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, teoria reprezentărilor cvasiconforme. Printre participanții la acest seminar s-au aflat: Cabiria Andreian Cazacu, Nicu Boboc, Ionel Bucur, Aurel Cornea, Cornel Constantinescu, Aristide Deleanu, Ciprian Foiaș, George Gussi, Martin Jurchescu, Valentin Poenaru și alții.

În această activitate generoasă, matematicienii au întâmpinat totuși uneori dificultăți considerabile. La unele din ele se referă însuși Stoilow în analiza făcută de el, în 1954, a principiilor care au stat la baza cercetării științifice în țara noastră în acei ani. Una din cauzele acestor dificultăți a fost înțelegerea uneori incorectă a unora din aceste principii, de pildă principiul planificării și colaborării, sau principiul legăturii cu practica. O altă cauză este legată de împrejurarea că lipsa de specialiști în acei ani a dus la un moment dat la o mărire considerabilă a normelor didactice la unele institute de învățământ superior. Stoilow atrage atenția asupra acestui fenomen cu evidente repercusiuni negative asupra cercetării științifice în învățământul superior și, în ultimă instanță, asupra calității însăși a acestui învățământ.

Dar cu toate că aceste dificultăți au încetinit oarecum ritmul dezvoltării matematicii în țara noastră, rezultatele nu s-au lăsat totuși mult timp așteptate și treptat s-a conturat ca o realitate vie acea nouă școală românească de care am vorbit mai sus. Ea s-a format în condițiile și pe baza solidă oferită de vechea școală, pe linia și în spiritul celei mai bune tradiții ale acesteia, dar având în plus o tendință netă către esență structurală și universalitate. (Dealtfel, în condițiile revoluției științifico-tehnice moderne, o școală științifică autodidactă este de neconceput.)

Astfel, în 1956, în cuvîntarea sa de deschidere la Congresul al IV-lea al matematicienilor români, Stoilow era îndreptățit să declare:

„Cînd cu doi ani în urmă s-a emis ideea organizării unui congres al matematicienilor români, ea s-a întemeiat pe o situație de fapt, și anume pe realizările obținute de oamenii de știință români în acest domeniu”, [75], p. 103.

Dar Congresul al IV-lea al matematicienilor români a fost nu numai un examen pentru școala românească de matematică, ci și un prilej de reluare a contactelor (întrerupte din timpul războiului) cu lumea matematică internațională, cu noile idei, tehnici și direcții de dezvoltare.

Prin 1961, cînd profesorul Simion Stoilow intra în legendă, noua școală românească de matematică era un fapt împlinit, iar problematica și limbajul cercetării matematice românești se identificaseră în linii mari cu problematica și limbajul matematicii moderne universale. Dovada avea să se facă mai tirziu prin 1968—70, la Congresul matematicienilor de expresie latină de la București, la Congresul internațional de matematică de la Nisa și la diferite alte întâlniri științifice internaționale din acea perioadă, la care au participat matematicienii români.

Simion Stoilow*

Toamna 1944. Universitatea din București avea nevoie de un rector: un rector a cărui personalitate să îmbine prestigiul cu puritatea politică. Acest rector a fost Simion Stoilow. Matematician de valoare internațională, Stoilow era cunoscut ca fiind acel ce rezolvase o problemă adîncă, și anume cea a caracterizării topologice a funcțiilor analitice. Om de atitudine neîndoiește antifascistă, Stoilow fusese în fruntea universitarilor care duceau de mai multă vreme o acțiune pentru ieșirea statului nostru din războiul hitlerist.

Rector al Universității din București, Stoilow a dus, cu sprijinul Partidului Comunist, lupta de democratizare a Universității: instituție formată din profesori — oameni de știință și din studenți — viitorul intelectualității poporului.

Primăvara 1946. La Paris urma să înceapă Conferința de pace. Statul nostru avea nevoie de un ambasador la Paris, în

* Articolul lui Gr. C. Moisil apărut în „Contemporanul”, 2 aprilie 1971.

al cărui prestigiu personal fermitatea politică să intre ca o componentă esențială. Acest ambasador a fost Simion Stoilow. Oamenii de știință din Paris îl cunoșteau: în 1916 își dăduse doctoratul acolo, un doctorat strălucit; în anul 1931 ținuse lecții la Facultatea de științe a marii Universități pariziene, lecții pe care fusese invitat să le țină spre a-și expune cercetările sale originale; în 1938, tradiționala editură a Academiei de Științe a Institutului Franței, editura Gauthier-Villars, publicase un volum de cercetări matematice originale, al cărui autor era Simion Stoilow. Lumea științifică din Franța îl cunoștea. Și-i cunoștea atitudinea politică.

Simion Stoilow ambasador însemna: poporul român are oameni de știință de seamă, cu care să se mîndrească; intelectualitatea românească n-a aderat la fascism; Partidul Comunist are încredere în intelectualitatea antifascistă românească.

Vara 1948. Sub conducerea Partidului Comunist Român, tinăra noastră Republică începea o operă de ridicare a nivelului poporului nostru: industrializarea țării pe temeliiile industriei naționalizate și ridicarea intelectuală a poporului.

Reforma Academiei asigura premisele dezvoltării științei românești. Reforma învățămîntului deschidea întregului popor porțile învățămîntului de gradul cel mai înalt și asigura viitorul unei științe românești creată de întregul nostru popor.

Partidul Comunist știa că are nevoie de matematică și că se poate sprijini pe matematicienii români. Simion Stoilow era un simbol și un muncitor fruntaș.

Președintele Secției de științe matematice și fizice a Academiei, directorul Institutului de matematică al acestei Academii, decanul Facultății de matematică și fizică din București, Stoilow nu și-a închipuit niciodată că e conducătorul matematicii românești. Și fiindcă nu și-a închipuit a fost.

Din vara 1948 pînă la 4 aprilie 1961, cînd a murit, Stoilow a fost pentru noi toți intruchiparea matematicianului comunist român.

Stoilow știa să pună pe primul plan al preocupărilor sale criteriul de valoare. La întrebarea pe care mulți o puneau sau și-o puneau pe atunci „cum trebuie să dezvoltăm matematica în etapa pe care o trăim a construcției socialismului în țara noastră”? atitudinea lui Stoilow era clară: trebuie făcută matematică de valoare pentru a putea cîștiga un loc cît mai înalt în cercetarea matematică internațională. Stoilow avea un

astfel de loc; el se căznea să descopere printre tineri pe acei care vor putea și ei să ocupe un astfel de loc. Caracterul internațional al cercetării matematice n-a fost uitat de Stoilow nici o clipă, numai trăirea matematică pe plan internațional permitea dezvoltarea unei matematici originale românești.

Se ridica acum vreo douăzeci de ani o problemă care tinerilor de azi li se pare, fără îndoială, străină, dar care atunci ne-a cerut multora o mare oboseală. Între 1920 și 1940 matematica se schimbase în esența ei; prin 1950 nu toată lumea prinsese de veste despre această schimbare. Și omul care gîndește, cînd nu înțelege, e contra. Azi se știe la ce servește matematica cea zisă pe atunci „modernă” sau „abstractă”, dar pe atunci, nu se știa la ce o să servească nici algebra, nici topologia, nici analiza funcțională, nici alte ramuri ale științei noastre, care nu existau decît de vreo 20—30 de ani.

Se întrebau unii: dacă nu se știe la ce servește, poate că nici nu servește; și dacă nu servește, cum le putem aplica criteriul practicii?

Istoria a dovedit că cei ce gîndeau așa nu înțelegeau cum se dezvoltă matematica. Dar ca să vedem cum se dezvoltă ne-au trebuit cei douăzeci de ani din urmă.

Simion Stoilow înțelegea matematica atît de bine, încît știa ce trebuie să caute să înțeleagă el și ce poate lăsa pe alții să înțeleagă. Și Stoilow înțelesese din vreme înspire ce se îndreaptă matematica. Și o practicase, această matematică nouă. Iată de ce dezvoltarea matematicii românești s-a putut face, din 1949 pînă azi, pe linia progresului. Ca și în politică, Stoilow alesese calea cea bună.

S. Stoilow: In memoriam*

Printr-o hotărîre a unui grup de cercetători, unanim însoțită de întregul Institut, această ședință de conferințe este închinată oficial „academicianului” Stoilow, dar pentru noi toți, inclusiv pentru cel care vă vorbește, memoriei fostului nostru director și profesor. De la moartea sa s-au împlinit ieri zece ani. Disparația sa bruscă, în mijlocul unei activități al

* Articolul lui Miron Nicolescu publicat în „Gazeta matematică”, seria. A, august 1971.

cărei ritm nu se întrerupsese vreodată și nici nu se încetinise, a fost resimțită de toți cei care am avut prilejul să-i fim mai apropiați, ca o nedreptate crudă împotriva orînduirii vieții matematice românești, care creștea furtunos, după o perioadă de oprire, sub clarvăzătoarea superviziune a maestrului. Dede-subtul crustei inevitabile a timpului, simțim și astăzi, în suflăt, la cea mai ușoară adiere a amintirilor, svîcnirea unei răni care, probabil, nu se va vindeca niciodată complet.

Deși, în dubla calitate de cel mai vechi student al profesorului și de urmaș al său la conducerea Institutului, îmi incumbă datoria de-a deschide această ședință, mărturisesc că aș fi preferat, în acest moment al aducerilor aminte, să stau undeva, în fundul acestei săli și, cu capul între mîini, să-mi adun amintirile risipite de-a lungul a cincizeci de ani. Este mult mai ușor să aduci un elogiu, chiar cu riscul unei îngroșări a aprecierilor, unei persoane demne de merit și de respect, dar de care nu te leagă suflătește nimic, sau aproape nimic, decît să-ți amintești de un om cu care întreaga ta viață științifică și socială este strîns impletită. Elogiul meritat ți se pare prea sonor, iar cuvîntul simplu prea sec. Poți oare ține un discurs, în public, despre părintele tău, sau despre unchiul tău preferat, sau despre fratele tău mai mare, care ți-a protejat copilaria și primii pași ai tinereții? Singura formă decentă sub care voim să-l readucem pentru cîteva clipe în amintirea noastră și pe care ar accepta-o, este aceea a unei povestiri simple. Voi încerca să fixez, așadar, cîteva momente sau perioade în care am resimțit puternic prezența profesorului. În toamna anului 1921 ar fi trebuit să fiu elev în ultima clasă de liceu, clasa a opta în numărătoarea de atunci. Dar, elev contestatar, am părăsit băncile școlii, pentru a pregăti acasă, după program propriu, două clase de liceu.

Am avut noroc, pentru că, intrat în facultate, am putut avea în anul I, ca profesor de analiză matematică, un tânăr doctor în matematici de la Paris, care își susținuse teza cu doi ani mai înainte. Spun că am avut noroc, pentru că în chiar anul următor, acest tânăr matematician a fost promovat profesor la Universitatea din Cernăuți.

Pe cei în căutare veșnică de lucruri noi, cursul tinărului profesor Stoilow îi putea satisface pe deplin. Dar aceasta nu ne împiedica să căutăm febril în puținele cursuri de analiză matematică, atunci disponibile la Biblioteca Fundației,

texte pe care să ne putem sprijini în studiul nostru individual. Dar zadarnic. Eram astfel reduși la urmărirea atentă a expunerii tinărului maestru. Cînd spun „atentă”, trebuie să înțelegem „cu încordată atenție” atît din cauza noutății materialului, pentru noi de-a dreptul senzațional, și a modului de raționament specific analizei matematice, la fel de nou ca și conținutul, cît și din cauza maestrului care își desfășura lecția cu eleganță nonșalantă, pendulînd neconținut, în ciuda tuturor canoanelor pedagogice, între cele două extremități ale mesei lungi care despărțea pe profesor de studenți. Dar ce importanță aveau toate regulile pedagogice față de arzătoarea noutate a lucrurilor expuse, care ne produceau o deosebită satisfacție, deși uneori ne lăsau perplecși. Căci vocabularul matematic nefiind încă fixat, în anii douăzeci, fraze care pentru maestru aveau desigur un înțeles, pe noi ne zăpăceau, la prima audiere, ca de exemplu următoarea: „Un șir crescător limitat are o limită”. Nu ne șifona atît fraza, care putea să apară ca o explicație a lui „limitat” prin „are o limită” sau invers, ci faptul că această frază constituia o teoremă, a cărei demonstrație nu era chiar imediată.

În asemenea situații de dificultate a audierii, în condiții normale, a unui curs modern de analiză matematică al anilor 1921—1922, nu este de mirare că, din 100 de studenți înscriși la început, la examenul profesorului Stoilow au rămas numai trei.

Al doilea contact cu profesorul l-am avut cîțiva ani mai tîrziu, la Paris, în iarna anului 1927, cînd terminasem de redactat o bună parte din teza de doctorat. A fost o întîlnire pentru mine fortuită, deși am înțeles, cîteva săptămîni mai tîrziu, că fusese planificată. Într-adevăr, după întoarcerea sa în țară, el mi-a scris o scrisoare în care mi-a comunicat că a obținut transformarea unei conferințe de biologie într-o conferință de matematică, sub rezerva acceptării mele de-a veni la Cernăuți, după susținerea tezei, pentru a ocupa această conferință. Bineînțeles am răspuns, cum se spune, prin primul curier, exprimîndu-mi bucuria de-a promova, din calitatea de student la aceea de tânăr coleg al profesorului meu.

De atunci, am mers pe același drum, eu cu mulți pași în urma lui, deși în scurt timp am devenit egali în fața legii învățămîntului.

Acolo, în acea mică universitate de provincie, un mare matematician își desfășura calm forțele imaginației sale creatoare. Acolo a luat naștere și s-a dezvoltat, de la primul memoriu, publicat în „Analele Școlii normale superioare din Paris” și pînă la monografia din colecția „Borel”, care l-a consacrat ca cel mai de seamă matematician al nostru și unul dintre specialiștii cei mai considerați ai timpului său, frumoasa sa teorie topologică a funcțiilor analitice.

Drumul meu științific nu a fost acela al profesorului meu. Dar munca sa și succesele pe care le dobîndea ca și toată activitatea sa, consacrată în întregime învățămîntului și cercetării științifice, au constituit pentru mine un îndemn permanent și un model de urmat în propria mea muncă, pe care o luasem foarte în serios.

În acea frumoasă, de neuitat, epocă de gestație, viața de toate zilele a profesorului Stoilow a fost o viață simplă, austeră, modestă, aproape viața unui student. Din cînd în cînd, totuși, avea izbucniri de revoltă, exprimate cu același volum al vocii, atunci cînd afla din ziare de vreun nou scandal politico-financiar, în care erau implicați oameni politici de toate gradele ierarhice sau cînd la universitate constata nereguli în numirea sau promovarea unui membru al corpului didactic. Aristocrat prin naștere, Stoilow era totuși, prin structura ființei sale, sensibil la orice nedreptate, pe care o resimțea ca o nedreptate făcută lui personal.

Nu este de mirare, pentru cei care l-au cunoscut și care au trăit în jurul lui, că el s-a situat, încă de la începutul carierei sale universitare, la stînga, în afara oricărui partid politic istoric, adversar ireductibil al fascismului care începea să prindă contur din ce în ce mai precis și mai amenințător, dar cu care partidele politice istorice cochetau, fără nici o jenă, pe rînd.

Transferat în București, Stoilow s-a găsit, din 1940, în mod natural, în fruntea acelui grup de universitari care se hotărîseră să acționeze, prin mijloacele pe care le aveau la îndemînă, cuvîntul și condeiul, pentru ieșirea statului nostru din războiul hitlerist. Tot atît de natural, cel puțin pentru cei care l-am iubit, după eliberare, în toamna anului 1944. Stoilow s-a găsit în fruntea Universității.

Doi ani mai tîrziu, este numit ambasador la Paris. Prezența în acest centru intelectual al lumii a unui om de știință

de prestigiu internațional, unanim apreciat și respectat, a contribuit, desigur, mult la înțelegerea justă, nedeformată, de către străinii de bună credință cu care veneau în contact, a transformărilor politice și sociale istorice care se operau în țara noastră.

În 1948, Stoilow participă la reorganizarea Academiei Române, devine președinte al Secției de științe matematice și fizice, calitate pe care o păstrează pînă la moarte.

Un an mai tîrziu, înființează Institutul de matematică, a cărui poveste a fost scrisă recent de noi toți, de-a lungul a 357 de pagini, din care jumătate cuprind, sobru și semnificativ, numai titlurile lucrărilor efectuate de membrii Institutului pînă acum doi ani. El a condus, în fapt, de la bun început acest Institut, pînă la sfîrșitul vieții sale. În cadrul acestui Institut, dirijat cu fermitate și cu o extraordinar de lucidă viziune a viitorului, Stoilow și-a găsit a doua mare vocație a vieții sale, care, alături de vocația de cercetător, va contribui ca numele său să fie în eternitate pomenit în zidurile acestui Institut: vocația de îndrumător al cercetării științifice. În ultima parte a vieții, Stoilow căuta cu tinerească perseverență și entuziasm și cu o pasiune de colecționar scrieri de înțelegere a fenomenului matematic printre studenții săi. Efortul său a fost amplu răsplătit. La strălucirea de astăzi a școlii matematice române, în particular a activității depuse în cadrul Institutului nostru, fundațiile au fost construite de profesorul nostru. Și nu numai fundațiile, ci și primele etaje.

Cu toate recunoașterile și distincțiile primite, cele mai multe destul de tîrziu, după 23 August, recunoașteri pe care le-a primit fără să alerge după ele, cu un ușor zîmbet în colțul gurii, adresat mai mult lui decît celorlalți, Stoilow și-a continuat neturburat, egal cu sine însuși, viața de savant și de cetățean, închinată cercetării și îndrumării înțelepte și sigure a cercetării în țara noastră, pînă în ziua în care moartea năpraznică l-a smuls dintre noi, pînă în ziua de 4 aprilie 1961. Cred că prietenul meu, colegul meu Grigore Moisil, nu o să-mi ia în nume de rău faptul că îmi voi lua libertatea să închei această dezordonată evocare cu observația de o rară adîncime făcută de el într-un admirabil articol recent, închinat memoriei maestrului, și care definește perfect caracterul acestuia: „Stoilow nu și-a închipuit niciodată că e conducătorul matematicii românești. Și fiindcă nu și-a închipuit, a fost”.

Paris, 16 ianuarie 1957

Dragă prietene,

Aflu cu durere de doliul care o afectează pe d-na Stoilow în legătură cu două persoane care-i erau foarte apropiate. Față de durerea ei, îmi exprim întreaga mea simpatie respectuoasă și afectuoasă.

Soția mea se află de două luni la Nice cu mama ei, în vîrstă de 84 de ani. Împreună cu ea se află acolo sora ei și fiul nostru Bernard, arhitect, aceștia din urmă stabiliți definitiv la Nice.

Mă gîndesc de mult să invit, pentru conferințe la Sorbona, pe colegii noștri Moisi și Vrănceanu. Practic, sînt atît de mulți savanți în trecere pe aici, care țin conferințe, atîtea seminarii și cursuri, încît este foarte greu să ai un auditoriu suficient de numeros pentru fiecare. Mijloacele financiare sînt aprig disputate. Nu pot fi retribuite mai mult de două conferințe, cite 10 000 de franci pentru fiecare dintre ele.

Cred că savanții români invitați ar putea fi subvenționați de către guvernul dv. Intenția mea este să obțin de la CNRS (Centrul Național al Cercetării Științifice) o invitație (nesubvenționată, alocațiile sînt numai anuale, una sau două pe an, pentru toate țările și, în plus, presupunînd că restricțiile draconice instaurate recent nu vor suprima aceste favoruri acordate străinilor) pentru a lua parte și a se asocia la munca de cercetare desfășurată la Institutul Henri Poincaré, de exemplu pe o durată de trei luni.

Aș dori să propun direcției Centrului să introducă practica invitațiilor de acest tip pentru savanții care pot obține din partea guvernelor lor asistență pentru cheltuielile de călătorie și sedere aici.

Eram pînă nu demult președinte al Comisiei de matematici pure. Dar aceasta este acum în curs de înnoire completă. Alegerile pentru matematicienii din întreaga Franță, profesori, conferențieri, asistenți, personal de cercetare etc. vor avea loc la 25 ianuarie și la 9 februarie, această din urmă dată în caz de balotaj. Probabil voi face parte din Comisie, în cadrul celor cinci membri numiți de către Minister în afara scrutinelui. Voi fi oare președinte al noii comisii, ceea ce dealtfel n-ar împiedica, ca și pînă acum, să fiu pus sistematic în situ-

ația de a eșua, de către bourbakisti? Voi beneficia oare de audiența lor? Să așteptăm două luni pentru a o ști.

Vă rog să primiți, dragă prietene, sentimentele mele de fidelitate, pentru dv. și pentru d-na Stoilow.

A. Denjoy

Nota autorilor. Arnaud Denjoy, născut în 1884, decedat în urmă cu aproximativ opt ani, este unul dintre cei mai mari matematicieni francezi, cu contribuții decisive în teoria derivării și a integrării, în teoria metrică și topologică a funcțiilor. Mare prieten al matematicii românești, a fost, prin cercetările sale, în strînsă legătură cu preocupările unor matematicieni români de seamă, începînd cu Dimitrie Pompeiu.



1. Tatăl lui Simion Stoilow, în 1870,
cînd avea gradul de maior.



2. Mama lui Simion Stoilow.



3. La vîrsta de şapte ani.